

LISA, ein europäisches Projekt

zur direkten Berechnung der Tragfähigkeit

duktiler Strukturen

M. Staat, FH-Aachen Abt. Jülich, Ginsterweg 1, D-52428 Jülich,
M. Heitzer, E.F. Hicken, Forschungszentrum Jülich GmbH, D-52425 Jülich

1 Einleitung und Problemstellung

Auslegung und Bemessung von Komponenten und Bauwerken erfolgen im Maschinenwesen und Konstruktiven Ingenieurbau überwiegend mit dem Ziel eines Spannungsnachweises unterhalb der Streckgrenze σ_0 . Im Apparatebau wird die plastische Auslegung nach Regelwerk weitgehend aus der elastischen Spannungsanalyse durch Extrapolation experimenteller und analytischer Ergebnisse im Sinne der Traglast- und Einspieltheorie gewonnen. Deshalb bilden linear elastische Rechnungen heute noch den überwiegenden Teil der Finite Elemente Anwendungen. Begünstigt durch die schnelle Rechnerentwicklung gewinnen aber zunehmend inelastische Analysen des plastischen (zeitunabhängigen) oder viskosen (zeitabhängigen) Verhaltens an Bedeutung. Das Ziel ist die kostengünstige Entwicklung betriebs- und sicherheitsoptimierter Strukturen.

Inkrementelle elasto-plastische Analysen des Strukturverhaltens lösen die mit der Spannungsbewertung verbundenen Probleme nur teilweise. Daneben sind sie mit einem nicht immer zu rechtfertigenden hohen Aufwand an Rechnerzeit, Personaleinsatz und Daten-Beschaffungskosten verbunden. Mit der Traglast- und Einspielanalyse bietet sich eine Methode an, die eine Spannungsbewertung umgeht und deren Aufwand eher einer elastischen Rechnungen entspricht. Im Regelwerk ist das Traglastkonzept für Balkenbiegung seit 1947 in Großbritannien und seit 1959 in den U.S.A. akzeptiert. Es ist in den neuen Eurocodes enthalten und findet Anwendung in der Zählbruchmechanik [9]. Trag- und Einspiellast bilden in der einen oder anderen Weise die Grundlage der Auslegungskonzepte aller Regelwerke für Druckbehälter und Rohrleitungen [5].

Angesichts des offensichtlichen Bedarfs muß es zunächst überraschen, daß FEM-basierte Traglast- und Einspielanalysen bislang nur vereinzelt mit speziellen FEM-Programmen meist im universitären Bereich durchgeführt worden sind [14]. Die industrielle Anwendung scheiterte weitgehend an großen numerischen Problemen, die das Verfahren auf kleine FEM-Modelle beschränkte. Am Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik

des Forschungszentrums Jülich wurde mit einer erfolgversprechenden Implementierung in PERMAS begonnen. In dem vierjährigen Brite-EuRam Projekt LISA (BE97-4547, Beginn Januar, 1998) soll auf der Basis von PERMAS die erste in ein industrielles FEM Programm integrierte Traglast- und Einspielanalyse zu einer umfassenden und an realitätsnahen, komplexen Problemen erprobten Version entwickelt werden.

1.1 Grenzen der Spannungsbewertung

Eine Optimierung der Tragfähigkeit und der Einsatzmöglichkeit von Konstruktionen aus duktilem Material muß die im überelastischen Bereich vorhandenen Reserven ausnutzen. Im Leichtbau strebt man einen möglichst gleichmäßigen Spannungsverlauf an und minimiert Spannungskonzentrationen. Man homogenisiert damit den Sicherheitsabstand von der Fließspannung σ_0 als elastischer Grenze. Die plastischen Reserven solcher Konstruktionen sind eher gering einzuschätzen. Das Spannungskonzept ist aber nicht unproblematisch. An der elastischen Traggrenze hat z.B. ein ideal plastischer Stab unter Zug keine, unter stationärer reiner Biegung dagegen 50% plastische Reserve (Rechteckquerschnitt).

Die lokale Werkstoffanstrengung wird durch die Vergleichsspannung bzw. Fließfunktion $f(\boldsymbol{\sigma})$ etwa nach den Hypothesen nach TRESCA oder nach VON MISES gemessen. Plastisch zulässig sind Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, die die Fließbedingung

$$f(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0 \quad (1)$$

erfüllen. Bei Gleichheit in einem Punkt wird die elastische Grenze erreicht und Fließen kann dort einsetzen. Im weiteren wird die VON MISES-Funktion gewählt.

Offenbar bestehen grundsätzliche Unterschiede zwischen der mit Spannungen meßbaren Werkstoffanstrengung und dem plastischen Versagen einer Struktur. Es gibt keine Spannung, die im plastischen Bereich die in Bild 1 gezeigten Versagensgrenzen beschreibt. Deshalb werden im Regelwerk des Anlagenbaus Spannungskategorien gebildet, damit unterschiedliche Spannungen verschieden bewertet werden können. Die bei Erreichen der Traglast zum plastischen Kollaps führenden mechanischen Spannungen werden primär genannt. Die meist thermisch induzierten Eigenspannungen heißen sekundär. Sie sind dehnungskontrolliert und beeinflussen die Traglast nicht. Auf diese Eigenschaft ist man bei thermisch hoch beanspruchten Komponenten im Apparatebau weitgehend angewiesen. Denn eine Spannungsreduktion ist konstruktiv nur bedingt möglich. Vergrößert man nämlich die Wandstärke, so sinken die primären Spannungen, während die sekundären ansteigen. Bisweilen wird aus elastischen Überlegungen eine optimale Wandstärke empfohlen, bei der beide Spannungsarten gleich groß sind [17].

Spannungsberechnungen und -bewertungen sind auch in anderer Hinsicht problematisch. Genau betrachtet sind alle Strukturen statisch unbestimmt, so daß Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ nur bis auf beliebige Eigenspannungen $\boldsymbol{\rho}$ aus einem Randwertproblem berechnet werden können. Man sieht das unmittelbar an den Gleichgewichtsbedingungen eines Körpers Ω unter den

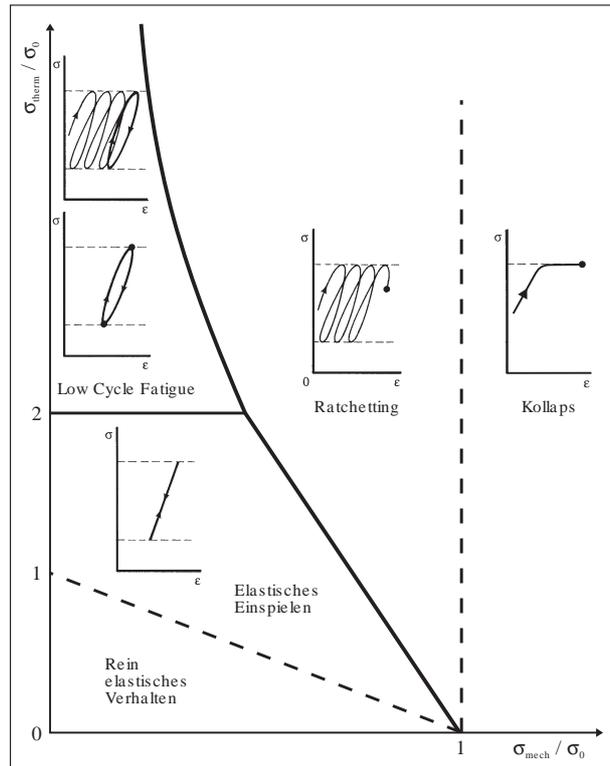


Abbildung 1: BREE-Interaktionsdiagramm für dünnwandige Rohre aus ideal plastischem Material. Es wird in dieser oder in modifizierter Form von verschiedenen Regelwerken genutzt [10].

Volumenlasten \mathbf{q} und den Oberflächenlasten \mathbf{p} auf dem Lastrand $\partial\Omega_\sigma$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{q} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \mathbf{p} & \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \end{aligned} \quad (2)$$

Eigenspannungen $\boldsymbol{\rho}$ sind mit Nullkräften im Gleichgewicht, erfüllen also die homogenen Bedingungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\rho} &= \mathbf{0} & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\rho} \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \end{aligned} \quad (3)$$

Da die Gleichungen linear sind, kann man sie addieren und erkennt, daß auch die Spannungen $\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}$ mit denselben Lasten \mathbf{q} und \mathbf{p} im Gleichgewicht stehen. Schweißspannungen und andere fertigungs- oder betriebsbedingte Restspannungen können beachtliche Größenordnungen erreichen. Ohne ihre Kenntnis bleiben Spannungen als Beanspruchungskonzept fiktiv.

Auch bei den Stabilitätsproblemen Knicken und Beulen spielt die Spannung keinerlei Rolle in der Berechnung der kritischen Last. Für plastisches Versagen (außer durch Insta-

bilität) soll im weiteren die kritische Last ebenfalls direkt ohne Umweg über eine Spannungsbewertung berechnet werde.

1.2 Traglastanalyse (Limit Analysis)

Die Struktur Ω sei durch die monotone Last $\mathbf{P} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ beansprucht. Gesucht ist der Traglastfaktor $\gamma > 1$, um den sich \mathbf{P} bis zum Kollaps auf $\gamma\mathbf{P}$ vergrößern läßt. Solange örtliches Fließen durch umgebendes elastisches Material begrenzt wird, tritt kein Kollaps ein. Die Traglasttheorie analysiert nur den Kollapszustand selbst, bei dem die Struktur mit unbeschränktem Fließen ohne Laststeigerung versagt. Die Traglastsätze beantworten die Frage, wann die Struktur aus duktilem Material sicher gegen Kollaps ist und wann sie mit Kollaps versagt [6].

Statischer Satz von der sicher tragbaren Last:

Eine Struktur kollabiert unter einer Last $\gamma_s\mathbf{P}$ nicht, wenn ein zulässiges Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}$ gefunden werden kann, das mit $\gamma_s\mathbf{P}$ im Gleichgewicht steht. In der Plastizität ist eine Spannung zulässig, wenn sie die Fließbedingung (1) erfüllt. In Formeln:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}) &\leq \sigma_0 && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} &= \gamma_s\mathbf{q} && \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} &= \gamma_s\mathbf{p} && \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \end{aligned} \quad (4)$$

Für jedes Spannungsfeld \mathbf{P} , das die Bedingungen des statischen Satzes erfüllt, ist γ_s ein Sicherheitsfaktor, so daß die Tragfähigkeit der Struktur noch nicht erschöpft ist. Man interessiert sich für den größten Faktor, für den die Struktur nicht kollabiert.

Setzt man assoziiertes Fließen voraus, so berechnen sich die plastischen Dehnungsraten $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p$ mit dem unbestimmten plastischen Multiplikator $\lambda \geq 0$ (mit $\lambda = 0$ für elastische Punkte d.h für $f(\boldsymbol{\sigma}) < \sigma_0$) gemäß

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (5)$$

aus der Fließfunktion. Diese ist positiv homogen vom Grad eins, so daß die partielle Differentialgleichung von EULER

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6)$$

gilt. Damit kann die (plastisch) dissipierte spezifische Leistung $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p : \boldsymbol{\sigma} > 0$ im Kollapszustand berechnet werden. Der Kollaps ist auch dadurch gekennzeichnet, daß keine weitere Laststeigerung mehr möglich ist. Die Struktur kollabiert also schließlich bei konstanten

Spannungen. Dann sind nach HOOKE auch die elastischen Dehnungen konstant. Die elastischen Dehnungsraten verschwinden, so daß $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^p$ gilt. Man erhält dann mit (5) und (6) für den Kollapszustand ($f(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_0$) die Dichte der Dissipation

$$\dot{\epsilon}^p : \boldsymbol{\sigma} = \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \lambda \frac{\partial f(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} = \lambda f(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda \sigma_0. \quad (7)$$

Damit kann der Kollaps auch dadurch charakterisiert werden, daß die innere (plastische) Dissipation $D_p(\dot{\epsilon}) > 0$ kleiner als die Leistung $\dot{W}(\gamma_k \mathbf{P}) = \gamma_k \dot{W}(\mathbf{P}) > 0$ der äußeren Last $\gamma_k \mathbf{P}$ ist:

$$D_p(\dot{\epsilon}) = \int_{\Omega} \dot{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \sigma_0 d\Omega < \gamma_k \left[\int_{\Omega} \mathbf{q} \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{p} \dot{\mathbf{u}} dA \right] = \gamma_k \dot{W}(\mathbf{P}). \quad (8)$$

Kinematischer Satz von der nicht mehr tragbaren Last:

Eine Struktur muß unter einer Last $\gamma_k \mathbf{P}$ kollabieren, wenn ein kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{u}}$ gefunden werden kann, so daß die innere Dissipation $D_p(\dot{\epsilon})$ kleiner als die Leistung $\gamma_k \dot{W}(\mathbf{P})$ der äußeren Last ist. Ein Geschwindigkeitsfeld ist kinematisch zulässig, wenn es die Kompatibilität für die Geschwindigkeiten und die kinematischen Randbedingungen auf dem Verschiebungsrand $\partial\Omega_u$ erfüllt. In Formeln:

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon} &= \frac{1}{2} [\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T] && \text{in } \Omega, \\ \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\mathbf{u}}^0 && \text{auf } \partial\Omega_u, \\ \frac{D_p(\dot{\epsilon})}{\dot{W}(\mathbf{P})} &< \gamma_k. && (9) \end{aligned}$$

Für jede Last \mathbf{P} und jedes Geschwindigkeitsfeld, das die Bedingungen des kinematischen Satzes erfüllt, ist γ_k ein Überlastfaktor, so daß die Tragfähigkeit der Struktur bereits erschöpft ist. Man interessiert sich für den kleinsten Faktor, für den die Struktur kollabiert.

Obwohl beide Sätze unmittelbar einsichtig sind, wird für ihren Beweis benötigt, daß die Fließfunktion $f(\boldsymbol{\sigma})$ nach dem Stabilitätspostulat von DRUCKER konvex ist. Die klassische Theorie ist geometrisch linear und nimmt assoziiertes Fließen an. Die Erweiterung auf verschiedene Modelle für verfestigende Werkstoffe, Temperaturlasten und temperaturabhängige Festigkeitswerte ist möglich. Bei Verfestigung kann σ_0 durch die Bruchspannung ersetzt werden. Ebenso kann man dafür andere zulässige Spannungen einsetzen, wie es in den Anwendungsbeispielen gemacht wird.

Aufgrund des folgenden Satzes läßt sich der Traglastfaktor γ beliebig genau berechnen. Jeder Sicherheitsfaktor bildet eine untere und jeder Überlastfaktor eine obere Schranke des Traglastfaktors.

Satz von der Eindeutigkeit der Traglast:

Sind γ_s und γ_k beliebige Sicherheits- bzw. Überlastfaktoren, die die Bedingungen des statischen bzw. kinematischen Satzes erfüllen, so gilt für den Traglastfaktor γ die Abschätzung

$$\gamma_s < \gamma < \gamma_k \quad (10)$$

und

$$\sup \gamma_s = \gamma = \inf \gamma_k. \quad (11)$$

Man berechnet daher eine untere Schranke des Traglastfaktors γ als den größten Sicherheitsfaktor aus

$$\begin{array}{ll} \text{Maximiere} & \gamma_s, \\ \text{unter} & \text{Erfüllung von Bedingungen (4)} \end{array} \quad (12)$$

oder eine obere Schranke als kleinsten Überlastfaktor aus

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \gamma_k, \\ \text{unter} & \text{Erfüllung von Bedingungen (9)}. \end{array} \quad (13)$$

Beide sind nichtlineare (infinite) Optimierungsprobleme. Die Unbekannten des Problems der unteren Schranke sind die statischen Größen γ_s und σ . Die Unbekannten des Problems der oberen Schranke sind die dazu dualen kinematischen Größen ε und \dot{u} . Die vollständige Lösung des plastischen Strukturverhaltens muß das Stoffgesetz sowie gleichzeitig die statischen und kinematischen Bedingungen erfüllen. Die Traglastsätze lösen nur einen Teil des vollständigen Problems der plastischen Strukturanalyse und sind daher wesentlich effektiver. Allerdings ist ihre Aussage auch auf die exakte Traglast eingeschränkt.

Es fällt auf, daß die elastischen Werkstoffkonstanten in den Traglastsätzen nicht auftreten. Die Spannungen in einer (statisch unbestimmten) Struktur hängen dagegen sehr wohl davon ab. Daher gibt es zwischen den Spannungen und der Kollapslast keinen funktionalen Zusammenhang, wie einleitend erläutert. Theoretisch und experimentell (nach MAIER-LEIBNITZ [7]) ist belegt, daß stationäre Eigenspannungen keinen Einfluß auf die Traglast haben, wenn sie die Geometrie und die Fließfunktion nicht ändern. Nur in dieser Hinsicht dürfen sie unberücksichtigt bleiben. Auch die dem Kollaps vorausgegangene Lastgeschichte bleibt ohne Einfluß. Physikalisch wird das geschilderte Verhalten verständlich, wenn man sich verdeutlicht, daß der Kollaps aus einem statisch bestimmten Zustand heraus erfolgt.

1.3 Einspielfanalyse (Shakedown Analysis)

Je nach Belastung kann eine Struktur die in Bild 1 symbolisierten Strukturantworten zeigen. Bei zeitvarianten Lasten kann die Struktur zusätzlich zum Kollaps plastisch versagen durch:

- Inkrementellen Kollaps bei Akkumulation plastischer Dehnungen über aufeinanderfolgende Lastzyklen (auch Ratchetting, progressive Plastifizierung, zyklisches „Kriechen“ genannt),
- plastische Ermüdung bei alternierender Plastifizierung in wenigen Lastzyklen (auch Low Cycle Fatigue (LCF), plastisches Einspielen genannt).

Die Struktur versagt dagegen plastisch nicht, wenn schließlich alle plastischen Dehnungen abklingen und die dissipierte Energie endlich bleibt. Man sagt die Struktur paßt sich der Belastung an oder sie spielt elastisch ein. Nach einigen anfänglich plastischen Zyklen läßt sich kontinuumsmechanisch kein Unterschied zum rein elastischen Verhalten mehr feststellen. Die möglichen Strukturantworten sind in Bild 1 symbolisch veranschaulicht.

Von einer Last $\mathbf{P}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ ist der zeitliche Verlauf oft nicht bekannt. Bekannt ist aber meist, daß sie nur in einem bestimmten konvexen Bereich \mathcal{L} variiert. \mathcal{L} ist typisch durch Amplituden oder zulässige Grenzen gegeben. Ist N_L die Anzahl der unabhängigen Belastungen $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{N_L}$ (z.B. mechanische, thermische Last), so lassen sich alle Lasten $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$ durch N_L erzeugende Lasten darstellen

$$\mathbf{P}(t) = \lambda_1(t)\mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_{N_L}(t)\mathbf{P}_{N_L}, \quad 0 \leq \lambda_j(t) \leq 1.$$

Die Tragfähigkeit ist bei Vergrößerung von \mathcal{L} um den Faktor $\gamma > 1$ durch Ratchetting, LCF oder Kollaps erschöpft. Die Einspieltheorie analysiert nur den eingespielten Zustand. Die Einspielsätze beantworten die Frage, wann die Struktur aus duktilem Material plastisch sicher ist und wann nicht [14].

Dieselben Bedingungen wie in den Traglastsätzen müssen zu allen Zeiten gleichzeitig gelten. Ihre Überprüfung in unendlich vielen Zeitpunkten ist unmöglich aber auch unnötig. Man kann zeigen, daß es genügt, die Einspielvoraussetzungen nur in den N_L Basisbelastungen $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{N_L}$ von \mathcal{L} zu erfüllen, da es sich um konkave/konvexe Optimierungsprobleme handelt. In der Praxis wird das oft fälschlich so verstanden, als genüge es, die kritischen Lastfälle unabhängig voneinander zu untersuchen. Es ist wesentlich, zu erkennen, daß die Bedingungen in allen Zeitpunkten gleichzeitig erfüllt werden müssen. Es macht einen Unterschied, ob man eine Einspielanalyse durchführt oder die Traglast zu den kritischen Lastfällen (Lastecken von \mathcal{L}) berechnet.

Allgemein spielt eine Struktur unter einem Lastraum \mathcal{L} ein, wenn zu jeder Belastung in \mathcal{L} ein zulässiges Spannungsfeld gefunden werden kann, das mit dieser Last im Gleichgewicht steht. Es reicht die Überprüfung der Einspielbedingungen in den Lastecken $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_j, \dots, \mathbf{P}_{N_L}$ mit $\mathbf{P}_j = (\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j)$:

Statischer Satz über das Einspielen:

Eine Struktur spielt unter einem Lastraum $\gamma_s \mathcal{L}$ ein, wenn zu jeder Basislast $\gamma_s \mathbf{P}_j$ ein zulässiges Spannungsfeld $\boldsymbol{\sigma}_j$ gefunden werden kann, welches mit

der Last $\gamma_s \mathbf{P}_j$ im Gleichgewicht steht. In Formeln:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\sigma}_j) &\leq \sigma_0 && \text{in } \Omega, \quad j = 1, \dots, N_L \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_j &= \gamma_s \mathbf{q}_j && \text{in } \Omega, \quad j = 1, \dots, N_L \\ \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma}_j &= \gamma_s \mathbf{p}_j && \text{auf } \partial\Omega_\sigma, \quad j = 1, \dots, N_L. \end{aligned} \quad (14)$$

Kinematischer Satz über das Nicht-Einspielen:

Eine Struktur kann unter einem Lastraum $\gamma_k \mathcal{L}$ nicht einspielen, wenn ein kinematisch zulässiges Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{u}}(t)$ gefunden werden kann, so daß die innere (plastische) Dissipationsarbeit der gesamten Belastung kleiner als die Arbeit der äußeren Last $\gamma_k \mathbf{P}(t) \in \gamma_k \mathcal{L}$ ist, d.h.

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) &= \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}}(t) + (\nabla \dot{\mathbf{u}}(t))^T) && \text{in } \Omega, \\ \dot{\mathbf{u}}(t) &= \dot{\mathbf{u}}^0(t) && \text{auf } \partial\Omega_u, \\ \int_0^\infty \int_\Omega D_p(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)) d\Omega dt &< \gamma_k \int_0^\infty \left[\int_\Omega \mathbf{q}(t) \dot{\mathbf{u}}(t) d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{p}(t) \dot{\mathbf{u}}(t) dA \right] dt \end{aligned} \quad (15)$$

Auch der Einspielfaktor γ läßt sich nach $\sup \gamma_s = \gamma = \inf \gamma_k$ exakt berechnen.

2 Zielsetzung und Konzipierung von LISA

2.1 Aufgabenstellung

Will man die Auslegungsgrenzen in den plastischen Bereich verschieben, so muß man Sicherheitsabstände zu den verschiedenen komplexen Versagensmoden (Kollaps, Ratchetting, LCF) berechnen können. Die Bilder 1 und 3 zeigen Beispiele für unterschiedliche Strukturzustände in einem zweidimensionalen Lastraum. Solche Interaktionsdiagramme werden im Stahl- und im Anlagenbau [10] teilweise genutzt, um den Einspiel- oder Kollapsbereich aus einer elastischen Rechnung abzuschätzen. Sie stehen aber nur selten zur Verfügung. Der elastische Bereich stellt für die vorgestellten Strukturen eine sehr starke Einschränkung dar.

Sicherheiten gegen plastisches Versagen können mit inkrementellen plastischen FEM-Analysen nur bedingt berechnet werden, indem man das in Bild 1 veranschaulichte Strukturverhalten simuliert. So kann man zwar für eine Lastgeschichte untersuchen, ob sie zum Einspielen führt, die Sicherheit müßte aber in Bezug auf alle möglichen benachbarten Lastgeschichten ermittelt werden. Das ist nur möglich, wenn man aus der Einspieltheorie schließen kann, daß die sichere Last von den Details der Lastgeschichte unabhängig ist.

Außerdem ist die inkrementelle Rechnung sehr aufwendig, weil sich das Strukturverhalten nahe den Sicherheitsgrenzen nur asymptotisch stabilisiert. Ratchetting läßt sich oft nur nach 40-100 berechneten Lastzyklen ausschließen. Die Steifigkeitsmatrix wird bei Annäherung an die Traglast singular. Auch die Ermittlung aller Details der Stoffgesetze ist aus finanziellen und praktischen Gründen kaum möglich. Hier reichen für Traglast- und Einspielanalysen weitgehend die Werte für Fließ- und Bruchspannung.

Seit mehr als zwei Jahrzehnten versucht man, die großen Vorteile der Traglast- und Einspielanalysen mit FEM-Diskretisierungen der statischen oder kinematischen Sätze nutzbar zu machen [6], [8]. Herausgekommen sind viele Entwicklungen für die akademische Forschung oder für die Anwendung auf spezielle Strukturen [14]. Einige Anwender haben damit begonnen, ihre eigenen Verfahren für die statischen oder kinematischen Sätze in die industriellen FEM Programme PERMAS ([18]), Castem 2000 ([11]), Code Aster ([21]), ABAQUS ([4], [13]), ADINA ([16]), ANSYS ([2]) und BERSAFE ([12]) zu implementieren. Alle diese Anwender kommen aus dem Anlagenbau und müssen folglich thermische Lasten berücksichtigen. Durch das von der Europäischen Kommission geförderte Brite-EuRam Projekt *LISA: FEM-based Limit and Shakedown Analysis for Design and Integrity Assessment in European Industry* soll jetzt die PERMAS Implementierung zu einem universellen, optimierten und industriell erprobten Traglast- und Einspiel-Modul erweitert und allgemein verfügbar gemacht werden. Dazu konnte auf Initiative des ersten Authors durch Koordination des Forschungszentrums Jülich (FZJ) ein kompetentes europäisches Konsortium aus führenden Hochschulinstituten (Thessaloniki (A.U.TH.), Liège (ULg)) und namhaften Industriefirmen (INTES, Siemens, Electricité de France (EDF), Bureau Veritas (BV)) gebildet werden.

2.2 Traglast- und Einspielanalyse als Optimierungsproblem

Die für das Kontinuum formulierten Traglast- und Einspielsätze lassen sich mit der FEM diskretisieren oder wie es vielfach durchgeführt wurde, gleich für eine diskretisierte Struktur herleiten. Die Diskretisierung der Gleichgewichtsbedingungen (2) lautet mit der Rechtecksmatrix C , der Spaltenmatrix $\mathbf{s}^T = (\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_i^T, \dots, \mathbf{s}_{N_G}^T)$ der Spannungen in den N_G GAUSS-Punkten und der Spaltenmatrix \mathbf{p} der äußeren Lasten:

$$C\mathbf{s} = \mathbf{p}. \quad (16)$$

Die Fließbedingung wird in den GAUSS-Punkten überprüft. Dann führt der statische Traglastsatz auf das konkave Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere} && \gamma_s \\ &\text{so, daß} && f(\mathbf{s}_i) \leq \sigma_0 \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, \dots, N_G\}, \\ &&& C\mathbf{s} = \gamma_s \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (17)$$

Die Diskretisierung der kinematischen Bedingungen in (9) mit N_F Freiheitsgraden wird mit den Spaltenmatrizen der Knotenpunktgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{u}}^T =$

$(\dot{\mathbf{u}}_1^T, \dots, \dot{\mathbf{u}}_i^T, \dots, \dot{\mathbf{u}}_{N_F}^T)$ und der Dehnungsraten $\dot{\epsilon}$ durch das adjungierte lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{C}^T \dot{\mathbf{u}} = \dot{\epsilon}. \quad (18)$$

beschrieben. Dann führt der kinematische Traglastsatz auf das konvexe Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiere} & \gamma_k \\ \text{so, daß} & \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{u}} = \dot{\epsilon}. \end{array} \quad (19)$$

Beide Optimierungsprobleme sind in dem im Anhang erläuterten Sinne zueinander dual. Daher ist die eine Formulierung aus der anderen herleitbar. Im Anhang wird mit (A8) eine vollständigere Version von (19) aus (17) hergeleitet. Die Charakterisierung der beiden nichtlinearen Optimierungsprobleme erlaubt die für die Anwendung wesentlichen Aussagen, daß sich mit ihnen der Traglastfaktor eindeutig und exakt berechnen läßt (siehe Anhang). Die Einspielsätze führen auf ähnliche Optimierungsprobleme (siehe [18]).

Für die VON MISES-Fließfunktion sind das zwei nichtlineare Optimierungsprobleme. Die vollständige Berechnung des plastischen Strukturverhaltens führt auf ein nichtlineares Gleichungssystem. Dafür sind für die FEM hochentwickelte iterative Verfahren auf der Basis wiederholter Lösungen linearer Gleichungssysteme entwickelt worden. In der vorliegenden Form sind die Optimierungsprobleme mit vorhandenen FEM-Programmen nicht darstellbar, weil z.B. die Matrix \mathbf{C} nur auf Elementebene zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix genutzt wird und nicht als Globalmatrix vorliegt. Daneben sind die Optimierungsprobleme mit großen numerischen Problemen behaftet. Daher waren Traglast- und Einspielanalysen trotz theoretischer Vorteile für die FEM bisher nicht nutzbar. Das soll in LISA geändert werden.

2.3 Lösung der Optimierungsprobleme in LISA

Bei den hier untersuchten Optimierungsproblemen ist der Extremwert einer sogenannten Zielfunktion unter Ungleichungs- und Gleichungsbedingungen (Restriktionen) gesucht. Die FEM-Diskretisierung führt schnell auf sehr viele Variable und Restriktionen. Der numerische Aufwand zur Lösung nichtlinearer Optimierungsproblemen wächst exponentiell mit der Problemgröße. Es ist also verständlich, daß bisher meist akademische Anwendungen der Traglast- und Einspielanalyse vorgelegt wurden [14].

Inzwischen sind sowohl für den statischen als auch für den kinematischen Satz erfolgversprechende Ansätze entwickelt worden, die die numerischen Probleme in den Griff bekommen können. Das Projekt LISA ist aussichtsreich, weil Erfahrungen mit diesen Ansätzen von unterschiedlichen Projektpartnern eingebracht werden und erstmals die Beteiligung des industriellen FEM-Entwicklers eine effektive Einbindung der neuen Verfahren und die ebenso wichtige Qualitätssicherung erwarten läßt.

Für die statischen Probleme zur Berechnung unterer Schranken wurden sogenannte Basisreduktionsverfahren entwickelt [25], die auf finite Volumenelemente erweitert und bereits in PERMAS implementiert wurden [18], [19]. Für die kinematischen Probleme zur Berechnung oberer Schranken wurden sogenannte Verfahren der fiktiven elastischen Materiale entwickelt und stehen im LISA Projekt in Code Aster ([21]) und in einem universitären FEM-Programm ([3]) zur Verfügung. Die bereits durchgeführten Vergleiche haben bisher keine eindeutigen Erkenntnisse über Effektivität und Robustheit der Verfahren vermittelt. Daneben sind theoretische Vor- und Nachteile der Ansätze zu diskutieren.

Die statischen Verfahren haben den Vorteil, daß sie sichere Lösungen liefern können, weil das numerische Verfahren das Optimum nur bis auf einen Abbruchfehler erreicht. Vertreter der kinematischen Verfahren halten dagegen, daß alle industriellen FEM-Programme Verschiebungsansätze nutzen. Damit lassen sich streng nur die kinematischen Bedingungen erfüllen. Daneben ist zu bedenken, daß bei der FEM alle Bedingungen nur in diskreten Punkten überprüft werden können. Theoretisch muß man die Restriktionen aber in jedem Punkt des Kontinuums beachten, damit die Lösungen Schrankencharakter haben. Das ist besonders bei lokalem Versagen durch LCF zu berücksichtigen. Die kinematische Formulierung führt zu einer an der Grenze zwischen elastischem und plastischen Bereich nicht differenzierbaren Zielfunktion. Daher muß die plastische Dissipation (Zielfunktion) regularisiert werden oder eine Lösung mit den weniger entwickelten Verfahren für nichtglatte Optimierung versucht werden [24].

Ungeachtet dieser Diskussion geht das LISA Projekt davon aus, daß dem Anwender eine untere und eine obere Schranke für den Traglast- oder Einspielfaktor geboten werden muß. Dazu soll die im Anhang dargestellte Dualität zwischen statischen und kinematischen Sätzen genutzt werden. Dann kann der Anwender bei dem sinnvollen Ergebnis $\gamma_s < \gamma_k$ den numerischen Abbruchfehler schätzen.

Die ebenfalls in LISA geplante Zuverlässigkeitsanalyse ist erst auf der Basis direkter Verfahren effektiv möglich. Das LISA Projekt könnte mit der Entwicklung einer plastischen Strukturoptimierung fortgesetzt werden, die von der elastischen Betrachtung abweichende Resultate generieren kann. Dies ist ohne Traglast- und Einspielanalyse auch heute kaum durchführbar [23].

3 Anwendungen der bereits implementierten statischen Sätze

Die statischen Sätze sind bereits in PERMAS implementiert [18], [19]. Die Anwendung dieses PERMAS-LISA genannten FEM-Moduls wird exemplarisch an zwei Beispielen aus dem Anlagenbau gezeigt. Weitere Beispiele finden sich in [18], [19]. Der Vergleich mit Implementationen der kinematischen Sätze sind im Rahmen des LISA Projektes in Vorbereitung. Dazu gehören auch Beispiele aus der Zählbruchmechanik. Zur Validierung

stehen umfangreiche Kataloge mit Traglastlösungen zur Verfügung [9], [15]. Dagegen gibt es nur wenige analytische oder experimentelle Ergebnisse zur Einspieltheorie.

3.1 Rohrabzweig

Als erstes Beispiel wird das PERMAS-Testbeispiel eines Rohrabzweigs untersucht. Der Rohrabzweig wird durch Innendruck P und achsensymmetrische quasi-stationäre Temperaturbelastung T_i im Inneren des Abzweigs belastet. Die Außentemperatur T_a entspricht der Umgebungstemperatur, die gleich Null gesetzt wird, so daß die Temperaturdifferenz $T_i - T_a = T_i$ ist. Wir beschränken uns auf temperaturunabhängige Materialdaten (E-Modul, Querkontraktionszahl und Fließspannung).

Der Abzweig ist durch 125 dreidimensionale 27-knotige Elemente (HEXEC27) diskretisiert. Die Elementspannungen werden in den 8 Ecken der Elemente abgelesen, so daß 1000 Knotenspannungen zur Verfügung stehen. Das FE-Netz ist Bild 3 zu entnehmen. Es ist:

Innendurchmesser Rohr	$D = 39$ mm
Innendurchmesser Abzweig	$d = 15$ mm
Wandstärke Rohr und Abzweig	$s = 3.44$ mm.

Folgende Lastbereiche werden untersucht:

1. Der Druck P und die Temperatur T_i variieren simultan mit einem Proportionalitätsfaktor (ein-parametrische Belastung):

$$\begin{aligned} 0 \leq P &\leq \gamma\mu P_0, & 0 \leq \mu &\leq 1 \\ 0 \leq T_i &\leq \gamma\mu T_0, & 0 \leq \mu &\leq 1. \end{aligned}$$

P_0 und T_0 sind jeweils ein Referenzdruck und eine Referenztemperatur.

2. Der Druck P und die Temperatur T_i variieren unabhängig voneinander (zwei-parametrische Belastung)

$$\begin{aligned} 0 \leq P &\leq \gamma\mu_1 P_0, & 0 \leq \mu_1 &\leq 1 \\ 0 \leq T_i &\leq \gamma\mu_2 T_0, & 0 \leq \mu_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

Beide Belastung werden für $T_0 \geq 0$ und $T_0 \leq 0$ untersucht. Dies entspricht jeweils einer erhöhten Innen- und Außentemperatur. Den Kollapsdruck erhält man als Spezialfall durch $T_0 = 0$. Der Druck bei Fließbeginn ist $P_{elast} \approx 0.0476\sigma_0$. Zum Vergleich wurde der Kollapsdruck ($T_0 = 0$) nach dem AD-Merkblatt B9 berechnet (siehe [19]). Für den Kollapsdruck gilt $P_{limit} \approx 0.136\sigma_0 = 2.85P_{elast}$. Über den Sicherheitsfaktor 1.5 erhält

man den Auslegungsdruck durch $P_{design} = P_{limit}/1.5 = 1.9P_{elast} = 0.0904\sigma_0$. Die Traglastanalyse mittels PERMAS–LISA ergibt den Traglastfaktor

$$\gamma_{limit} = 2.82. \quad (20)$$

Der durch die Traglastanalyse berechnete Kollapsdruck ist

$$P_{limit} = \gamma_{limit}P_{elast} = 0.134\sigma_0. \quad (21)$$

Die Absicherung gegen Kollaps ist mit der Traglastanalyse etwa 10 mal schneller als mit der herkömmlichen inkrementellen Rechnung. Die Rechenzeiten im Verhältnis zu der inkrementellen Berechnung sind in Bild 2 dargestellt. Die zusätzlich für die Einspielanalyse bei zyklischem Innendruck benötigte CPU-Zeit beträgt ca. das Doppelte der elastischen Rechnung. In diesem Fall konvergiert die Einspielanalyse schneller als die Traglastanalyse und liegt im Bereich der Rechenzeit einer elastischen Rechnung.

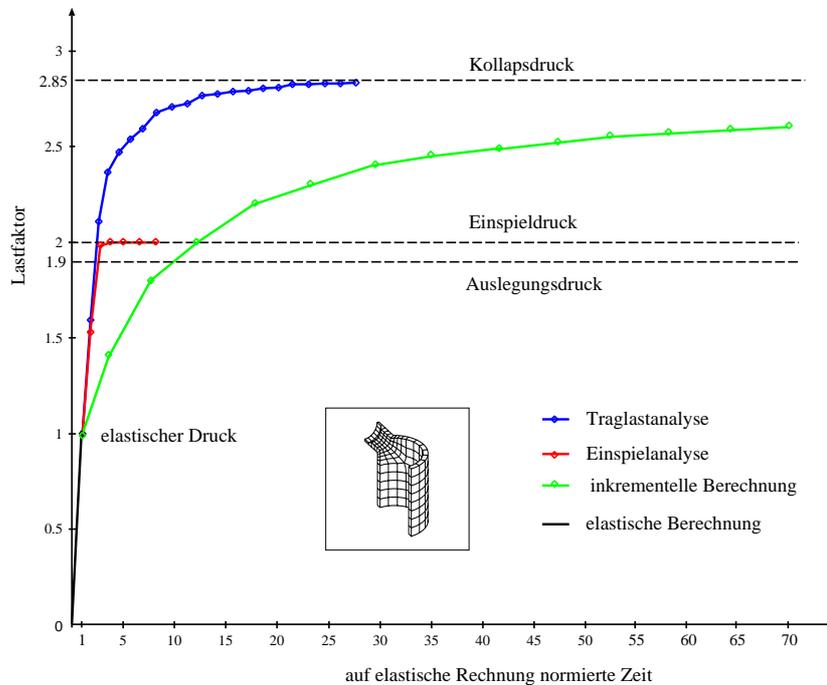


Abbildung 2: Rechenzeitvergleich für einen Rohrabzweig unter Innendruck

Die Ergebnisse der Einspielanalyse sind in Bild 3 dargestellt. Die kurz-gestrichelte Linie in Bild 3 begrenzt den elastischen Lastbereich für einparametrische Belastung. Das Abknicken im ersten Quadranten bedeutet, daß eine geringe Temperaturbelastung eine Erhöhung des möglichen elastischen Drucks ermöglicht. Bei zwei-parametrischer Belastung stößt der Lastbereich für die Werte 1 auf der Abszisse und -1 auf der Ordinate an die elastische Grenze, so daß hier der elastische Lastbereich „abgeschnitten“ wird. Die mögliche elastische Vergrößerung des Lastbereiches ist dann durch den rein elastischen Druck und die rein elastische Temperatur begrenzt.

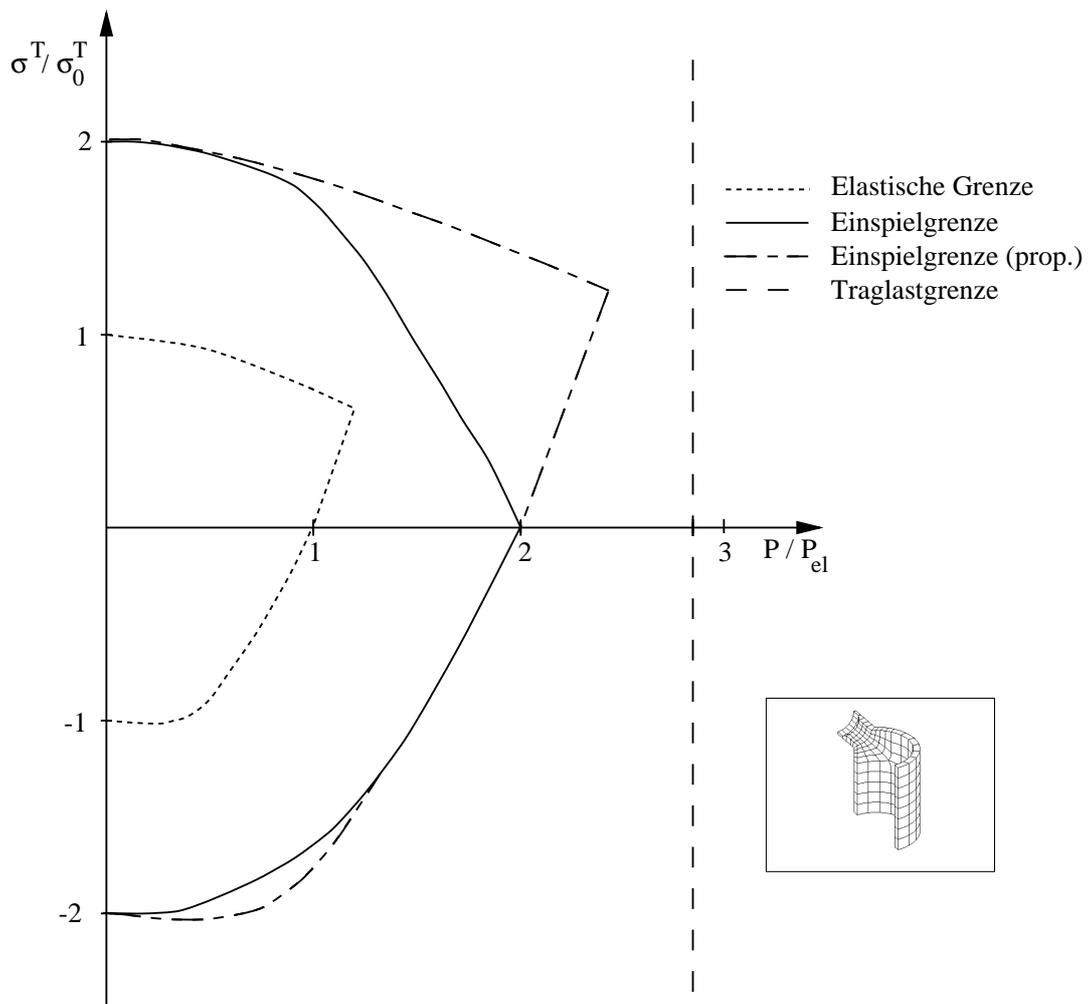


Abbildung 3: Interaktionsdiagramm des Rohrabzweigs

Die zur thermischen Belastung gehörenden Spannungen sind Eigenspannungen. Daraus folgt, daß die thermische Belastung keinen Einfluß auf die Traglast des Abzweigs hat. Die Traglastgrenze stellt im Interaktionsdiagramm (siehe Bild 3) eine Gerade parallel zu der Ordinate dar. Abszisse und Ordinate sind auf den elastischen Druck P_{el} und auf die elastische Vergleichsspannung σ_0^T resultierend aus der mechanischen bzw. thermischen Belastung zu Fließbeginn normiert.

Die strich-punktierte Linie begrenzt den Einspielbereich für ein-parametrische Belastung. Der Einspielfaktor γ_{shake} bezogen auf die elastische Lösung ist im gesamten Bereich näherungsweise 2 ($1.98 \leq \gamma_{shake} \leq 2$). Für proportionale Belastung verdoppelt sich der Lastbereich bei elastischem Einspielen gegenüber dem elastischen Betriebsbereich. Dies begründet sich im lokalen Versagen des Abzweigs in den Stutzenkanten durch LCF. Der Punkt des erstmaligen Fließens und der für das Versagen verantwortliche Punkt stimmen überein. In diesem Fall des lokalen Versagens erhöhen sich die Einspiellasten für linear und nichtlinear kinematisch verfestigendes Material nicht. Allgemein kann die Einspiellast bei lokalem LCF durch kinematische Verfestigung (linear oder nichtlinear) nicht gesteigert werden ([25]). Die durchgezogene Linie begrenzt den Einspielbereich für zwei-parametrische Belastung. Der Einspielfaktor liegt bezogen auf die elastische Lösung zwischen 1.46 und 2.

Das Beispiel zeigt, daß der elastische Bereich den Betrieb der Komponente schon unter reinem Innendruck stark einschränkt. Das Verhalten ist dem einer Platte mit Kreisloch ähnlich [19]. Die Spannungskonzentrationen lassen sich daher kaum mit Mitteln der elastischen Strukturoptimierung reduzieren. Hier kann die plastische Analyse entscheidende Vorteile bringen.

3.2 Druckbehälter

In Japan haben 16 Teams ein Benchmark Programm zur inkrementellen Traglastberechnung mit unterschiedlichen FEM-Programmen und Diskretisierungen durchgeführt (siehe [22] und Tabelle 2). Das untersuchte Modell ist ein Behälter aus einem Zylinder und einem gewölbten Boden mit kegeligem Zwischenstück (für die Dimensionierung siehe Bild 4) unter reinem Innendruck. Für diese Geometrie gibt es im Regelwerk keine Traglastlösung. In allen Traglastuntersuchungen wurde elastisch ideal plastisches Materialverhalten vorausgesetzt. Im Beispiel ist der Baustahl SFVQ1A des Japanischen Industrie Standards (JIS) gewählt (entspricht dem warmfesten Stahl 20MnMoNi45 nach DIN). Die Materialdaten sind nach dem MITI Code für eine Temperatur von 300° C berechnet. Die Abmessungen und Materialdaten des Benchmark Beispiels sind in Tabelle 1 zusammengefaßt. Statt der Fließspannung σ_0 wird der durch den Faktor 2 abgeminderte Werkstoffwert $S_m \approx 0.5\sigma_0$ verwendet.

Die elastische Analyse der japanischen Teams ergibt einen Druck bei Fließbeginn (Fließdruck) von $8.6 N/mm^2$ für $1.5 \cdot S_m = 276 N/mm^2$. Die Traglastberechnungen der japanischen Teams wurden für $1.5 \cdot S_m$ mit Hilfe der *Double Elastic Slope Method (DESM)* für

Zwischenstücklänge	l	=	658.2 mm
Zylinderlänge	L	=	3000 mm
Bodeninnenradius	R_b	=	4500 mm
Krempeninnenradius	R_k	=	360 mm
Zylinderinnenradius	R_z	=	3000 mm
Wandstärke	s	=	225 mm
E-Modul	E	=	$1.75 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$
Querkontraktion	ν	=	0.3
Fließspannung	σ_0	=	370 N/mm^2

Tabelle 1: Abmessungen und Materialdaten des Druckbehälters

ideal plastisches Materialverhalten durchgeführt (siehe dazu ASME Code, Sect. III, NB-3213.25). Eine Liste der benutzten FE-Programme und der wichtigsten Eigenschaften der FE-Modelle sind in Tabelle 2 aufgeführt. Es wurden 7 FE-Programme mit unterschiedlichen Modellen getestet. Dabei wurden Modelle mit bis zu 2435 Knoten untersucht.

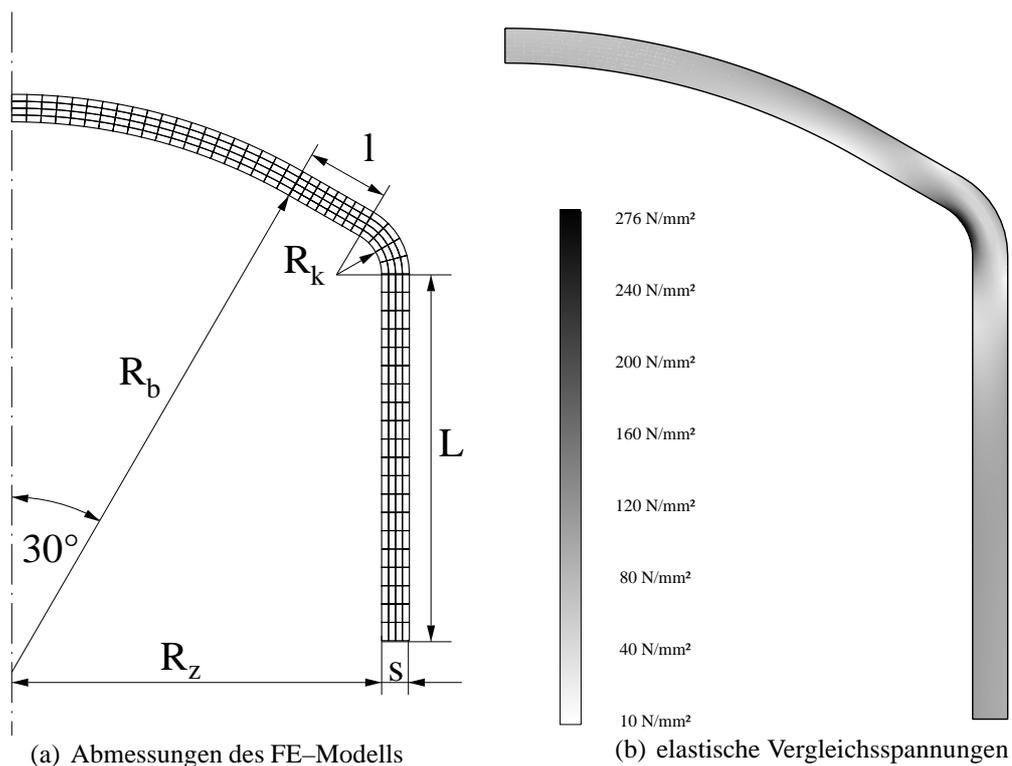


Abbildung 4: Abmessungen und VON MISES Vergleichsspannungen des FE-Modells

Für die Traglastanalyse mit PERMAS-LISA wurde das Modell durch 208 rotationssymmetrische 9-knotige Elemente (QUAX9) diskretisiert. Die elastische Analyse ergibt für

die in Bild 4 dargestellte Diskretisierung einen Fließdruck von $8.5 N/mm^2$ und stimmt damit gut mit den Ergebnissen der japanischen Teams überein (siehe dazu auch das Bild der Spannungsschattierungen in Bild 4). Der Fließdruck P_{elast}^z bei $1.5 \cdot S_m$ für den geschlossenen Zylinder berechnet sich nach [20] durch:

$$P_{elast}^z = \frac{1.5 \cdot S_m}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{R_z^2}{(R_z + s)^2} \right) = 21.46 N/mm^2.$$

Der Traglastfaktor γ_{limit} für den Zylinder ergibt sich nach [20] zu $\gamma_{limit} = 1.074$, so daß die analytische Traglast des Zylinders durch $P_{limit}^z = 23.05 N/mm^2$ gegeben ist. Mit Hilfe der Traglastanalyse mit PERMAS-LISA wurde eine Traglast von $23.00 N/mm^2$ berechnet. Dies bedeutet eine Abweichung von 0.2 % von der Traglast des Zylinders, so daß die Kreppe und der Behälterboden keinen nennenswerten Einfluß auf die Traglast haben. Ein Vergleich der durch die japanischen Teams erhaltenen Traglasten des Behälters und der Traglast nach Traglastanalyse ist in Tabelle 2 dargestellt.

Dieses Beispiel zeigt bei Innendruck ein für Leichtbaukomponenten typisches Verhalten mit geringen plastischen Reserven. Hier ist eine elastische Auslegung angemessen. Das Bild ändert sich sofort, wenn z.B. thermische Spannungen hinzu kommen, wie Bild 1 zeigt. Wie bereits dargelegt, lassen sich thermische Spannungen kaum konstruktiv reduzieren, so daß man hier in der Regel auf plastische Konzepte angewiesen ist.

Programm	Elementtyp	Anzahl Knoten	Anzahl Elemente	Anzahl Elemente/Dicke	Kollapsdruck (N/mm^2)
MARC	8-knotig Quad.	569	160	4	20.8
MARC	8-knotig Quad.	725	210	5	21.0
ABAQUS	4-knotig Quad.	628	405	5	21.4
FINAS	8-knotig Quad.	579	156	3	21.0
FINAS	8-knotig Quad.	579	156	3	22.0
ADINA	8-knotig Quad.	1388	405	5	20.6
STAX	4-knotig Quad.	343	288	6	21.9
PC-FEAP	4-knotig Quad.	315	248	4	21.0
MARC	8-knotig Quad.	681	192	4	21.0
ABAQUS	8-knotig Quad.	849	240	4	22.0
ABAQUS	4-knotig Quad.	492	405	5	21.0
FINAS	8-knotig Quad.	350	96	4	21.0
ABAQUS	8-knotig Quad.	2435	744	8	21.5
ANSYS	4-knotig Quad.	492	405	5	21.8
FINAS	4-knotig Quad.	310	244	4	22.9
PERMAS-LISA	9-knotig Quad.	832	208	4	23.0

Tabelle 2: Liste der angewandten Programme, FE-Modelle und Traglastergebnisse (bis auf PERMAS-LISA aus [22] entnommen).

4 Zusammenfassung

Traglast- und Einspielanalysen sind vereinfachte doch exakte Verfahren der Plastizität, die neben ausreichender Verformbarkeit keine einschränkenden Voraussetzungen beinhalten. Die Vereinfachungen betreffen die Beschaffung der Daten und Modelle für Details der Lastgeschichte und des Stoffverhaltens. Anders als die klassische Behandlung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik führt die Methode auf Optimierungsprobleme. Diese sind bei realistischen FEM-Modellen sehr groß. Das hat die industrielle Anwendung der Traglast- und Einspielanalysen stark verzögert.

Diese Situation wird durch das Brite-EuRam Projekt LISA grundlegend geändert. Die Autoren möchten der Europäischen Kommission an dieser Stelle für die Förderung ausdrücklich danken. In LISA entsteht auf der Basis des industriellen FEM-Programms PERMAS ein Verfahren zur direkten Berechnung der Tragfähigkeit duktiler Strukturen. Damit kann der Betriebsbereich von Komponenten und Bauwerken auf den plastischen Bereich erweitert werden, ohne den Aufwand gegenüber elastischen Analysen wesentlich zu erhöhen. Die beachtlichen Rechenzeitgewinne erlauben Parameterstudien und die Berechnung von Interaktionsdiagrammen, die einen schnellen Überblick über mögliche Betriebsbereiche vermitteln. Es zeigt sich, daß abhängig von der Komponente und ihren Belastungen teilweise entscheidende Sicherheitsgewinne zur Erweiterung der Betriebsbereiche erzielt werden können.

Das Vorgehen erfordert vom Anwender oft ein gewisses Umdenken. Es werden keine Spannungen berechnet, um damit Sicherheit und Lebensdauer zu interpretieren. Statt dessen berechnet man direkt die gesuchte Sicherheit. Der Post-Prozessor wird nur noch zur Modell- und Rechenkontrolle benötigt. Das Vorgehen ist ähnlich der Stabilitätsanalyse (Knicken, Beulen). Durch namhafte industrielle Projektpartner werden Validierung und die Anwendbarkeit auf eine breite Palette technischer Probleme garantiert. Die ebenfalls in LISA geplante Zuverlässigkeitsanalyse ist erst auf der Basis direkter Verfahren effektiv möglich. Ohne Traglast- und Einspielanalyse ist plastische Strukturoptimierung auch heute kaum durchführbar.

Literatur

- [1] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, C.M. Shetty: *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*. John Wiley, New York (1993).
- [2] R. Hamilton, J. Shi, D. Mackenzie, J.T. Boyle: *A Simple Upper-Bound Method for Shakedown Analysis*. Trans. ASME, Journal of Pressure Vessel Technology **120** (1998) S. 195-199.

- [3] Bui Cong Thanh, Yan Ai-Min, Nguyen Dang Hung: *Comparsion and numerical testing of limit analysis and shakedown computation of nuclear plant components*. Internal Report Nr. R96–21, LTAS, Université de Liège (1993).
- [4] D.E. Buckthorpe, P.S. White: *Shakedown: A design tool for high temperatuer*. GEC Journal of Research: Incorporation of the Marconi Review and the Plessey Research Review **11** (1993) 24-38.
- [5] J. Ciprian: *Ausgewählte Kapitel aus nationalen und internationalen Regelwerken zur Frage der Auslegung von Druckbehältern, Teil 1*. vt „verfahrenstechnik“ **14** (1980) 49-55.
- [6] M.Z. Cohn, G. Maier (Hrsg.): *Engineering Plasticity by Mathematical Programming*. Pergamon Press, New York (1979).
- [7] Maier-Leibnitz: *Beitrag zur Frage der Tragfähigkeit einfacher und durchlaufender Balkenträger aus Baustahl St 37 und aus Holz*. Die Bautechnik **6** (1928) 11-14 und 27-31.
- [8] R.H. Mallet (Hrsg.): *Limit Analysis Using Finite Elements*. The American Society of Mechanical Engineers, (1976).
- [9] A.G. Miller: *Review of Limit Loads of Structures Containing Defects*. Int. J. Pres. Vess. & Piping **32** (1988) 197-327.
- [10] H.W. Ng, D.N. Moreton: *The Bree-Diagram - origins and literature - some recent advances concerning experimental verification and strain-hardening materials*. In B. Wilshire (Hrsg.): *Recent advances in creep and fracture of engineering materials and structures*. Pineridge Press (1982) 185-230.
- [11] D. Plancq, M. N. Berton, C. Wielgosz, P. Genette: *Limit analysis based on elastic compensation method of branch pipe tee connection under internal pressure and out-of-plane moment loading*. Transactions of SMiRT **14**, Lyon (1997), B02/3, S. 41-48.
- [12] A.R.S. Ponter, K.F. Carter: *Shakedown state simulation techniques based on linear elastic solutions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering **140** (1997) 259–279.
- [13] A.R.S. Ponter, M. Engelhardt: *A computational techniques for shakedown limits and related problems*. EUROMECH 385 Colloquium, Aachen, 8.-11. September 1998, S.31-33.
- [14] M. Save, G. de Saxcé, A. Borkowski: *Computations of shakedown loads feasibility study*. CEC Report EUR 13618 EN, Brusses, Luxembourg (1991).
- [15] M. Save: *Atlas of Limit Loads of Metal Plates, Shells and Disks*. Elsevier, Amsterdam (1995).

- [16] T. Siebler: *Shakedown-Analyse diskreter, elastisch ideal-plastischer Strukturen bei zyklisch thermischer Belastung mit direkt gewählten Eigenspannungsverteilungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (1988).
- [17] D. Smidt: *Reaktortechnik*. Band 1, G. Braun, Karlsruhe (1971).
- [18] M. Staat, M. Heitzer: *Limit and Shakedown Analysis Using a General Purpose Finite Element Code*. Proceedings of the NAFEMS World Congress '97 on Design, Simulation & Optimization, University of Stuttgart, 9-11 April 1997, S. 522–533. (1993).
- [19] M. Staat, M. Heitzer: *Limit and shakedown analysis for plastic safety of complex structures*. Transactions of SMiRT **14**, Lyon (1997), B02/2, S. 33-40.
- [20] I. Szabo: *Höhere Technische Mechanik*. Springer-Verlag, Berlin (1964).
- [21] F. Voldoire: *Limit analysis by the Norton-Hoff-Friaâ regularising method*. EDF/IMA/MMN, Interner Bericht (1998).
- [22] S. Yamamoto, S. Asada, A. Okamoto: *Round Robin calculations of collapse loads – a torispherical pressure vessel head with a conical transition*, Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology **119**, (1997), 503–509.
- [23] Wei H. Yang: *Plastic Analysis and Design of Pipes and Vessels*. In: Technology for the '90s. A Dcade of Progress. The ASME Pressure Vessels and Piping Division, (Hrsg.) M.K. Au-Yang et al., The American Society of Mechanical Engineers, New York (1993).
- [24] G. Zhang, D. Bischoff: *Traglastberechnung mit Hilfe der kinematischen Formulierung*. ZAMM **68** (1988) T267-T268.
- [25] G. Zhang: *Einspielen und dessen numerische Behandlung von Flächentragwerken aus ideal plastischem bzw. kinematisch verfestigendem Material*. Dissertation, Universität Hannover (1991).

A Anhang: LAGRANGE-Dualität

Die aus den statischen und kinematischen Sätzen für diskretisierte Strukturen herleitbaren Optimierungsprobleme sind zueinander dual. Diese Beziehung wird für die Traglastsätze erläutert. Genaueres zur LAGRANGE-Dualität findet sich in [1].

Das statische sei das primale Problem (17)

$$\begin{array}{ll}
 \text{Maximiere} & \gamma_s \\
 \text{so, daß} & \mathbf{f}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}_0 \leq \mathbf{0}, \\
 & \mathbf{C}\mathbf{s} - \gamma_s\mathbf{p} = \mathbf{0}.
 \end{array} \tag{A1}$$

Darin sind auch die in den N_G GAUSS-Punkten zu prüfenden Ungleichungsbedingungen mit den Spaltenvektoren \mathbf{f} , \mathbf{s} und \mathbf{s}_0 zusammengefaßt worden. Die Unbekannten sind die statischen Größen Traglastfaktor γ_s und Knotenpunktspannung \mathbf{s} . Die LAGRANGE-Funktion $L(\gamma_s, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda})$ lautet mit den LAGRANGE-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$ und $\dot{\mathbf{u}}$

$$L(\gamma_s, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) = \gamma_s + \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{C}\mathbf{s} - \gamma_s \mathbf{p}) - \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}_0). \quad (\text{A2})$$

Im Optimum hat $L(\gamma_s, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda})$ einen Sattelpunkt, d.h. man erhält das Optimum auch aus

$$\min_{\dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}} \max_{\gamma_s, \mathbf{s}} L(\gamma_s, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}). \quad (\text{A3})$$

Die notwendigen Bedingungen für das Maximum lauten

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma_s} = 1 - \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} = 0, \quad (\text{A4})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{s}} = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{C} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}. \quad (\text{A5})$$

Gleichung (A4) bedeutet eine Normierung der Größe der äußeren Leistung $\dot{W} = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} = 1$ der diskretisierten Struktur. In die duale Zielfunktion $l(\dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) = \max_{\gamma_s, \mathbf{s}} L(\gamma_s, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda})$ eingesetzt erhält man mit der EULERSchen Differentialgleichung

$$\mathbf{s}^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{f}(\mathbf{s}) \quad (\text{A6})$$

und mit (A4) nach einfacher Rechnung für $\boldsymbol{\lambda} \geq 0$

$$l(\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\gamma_s, \mathbf{s}} L(\gamma_s, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{s}_0 = D_p(\dot{\epsilon}). \quad (\text{A7})$$

Gleichung (A3) ergibt schließlich mit (A4), (A5) und (A7) das duale Problem

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{s}_0 \quad (= \quad \gamma_k) \\ \text{so, daß} \quad & \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \\ & \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} = 1, \\ & \mathbf{C}^T \dot{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{s}} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

Denn wegen der Normierung $\dot{W} = \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{p} = 1$ (siehe auch (9)) ist $\gamma_k = l(\boldsymbol{\lambda}) = D_p(\dot{\epsilon})$. Die LAGRANGE-Multiplikatoren des primalen Problems sind die Variablen des dualen Problems. Hier ist das duale Problem in den kinematischen Größen $\dot{\mathbf{u}}$ und $\boldsymbol{\lambda}$ formuliert.

Gleichung (A5) kann man mit

$$\dot{\epsilon}^p = \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \quad (\text{A9})$$

für assoziiertes Fließen und $\dot{e}^p = \dot{e}$ im Kollaps zu

$$\mathbf{C}^T \dot{\mathbf{u}} - \dot{e} = \mathbf{0} \quad (\text{A10})$$

umschreiben. Damit erhält man die Gleichungsbedingung von Problem (19).

Beide Probleme haben affine Gleichungsrestriktionen. Der Sattelpunkt der LAGRANGE-Funktion zeigt, daß das Maximumproblem konkav und das Minimumproblem konvex ist und daß beide Probleme denselben Optimalwert haben

$$\max \gamma_s = \gamma = \min \gamma_k. \quad (\text{A11})$$

Für konvexe bzw. konkave Probleme weiß man auch, daß das lokale Optimum zugleich das globale ist. Daher ist der Traglastfaktor (Einspielfaktor) eindeutig und exakt berechenbar.