

Direkte FEM-Berechnung der Tragfähigkeit hochbeanspruchter passiver Komponenten

Direct FEM-Computation of Load Carrying Capacity of Highly Loaded Passive Components

M. Staat, M. Heitzer

Institut für Sicherheitsforschung und Reaktortechnik,
Forschungszentrum Jülich GmbH, D-52425 Jülich

23. MPA-Seminar, Stuttgart, 1. und 2. Oktober 1997

Zusammenfassung

Genaue Kenntnis der Spannungen und Verformungen in passiven Komponenten gewinnt man mit detaillierten inelastischen FEM Analysen. Die lokale Beanspruchung läßt sich aber nicht direkt mit einer Beanspruchbarkeit im strukturmechanischen Sinne vergleichen. Konzentriert man sich auf die Frage nach der Tragfähigkeit, dann vereinfacht sich die Analyse. Im Rahmen der Plastizitätstheorie berechnen Traglast- und Einspielanalyse die tragbaren Lasten direkt und exakt. In diesem Beitrag wird eine Implementierung der Traglast- und Einspielsätze in ein allgemeines FEM Programm vorgestellt, mit der die Tragfähigkeit passiver Komponenten direkt berechnet wird. Die benutzten Konzepte werden in Bezug auf die übliche Strukturanalyse erläutert. Beispiele mit lokal hoher Beanspruchung verdeutlichen die Anwendung der FEM basierten Traglast- und Einspielanalysen. Die berechneten Interaktionsdiagramme geben einen guten Überblick über die möglichen Betriebsbereiche passiver Komponenten. Die Traglastanalyse bietet auch einen strukturmechanischen Zugang zur Kollapslast rißbehafteter Komponenten aus hochzähem Material.

NOMENKLATUR

b	Volumenlast	$\alpha_k, \tilde{\alpha}_k$	Formzahlen
n	äußerer Normalenvektor	$\beta, \beta_{limit}, \beta_{SD}$	Last-, Traglast und Einspielfaktor
p	Oberflächenlast	ε	aktuelle Dehnung
$p_1, p_2, \mathbf{P}(t)$	Lasten	ε^E	elastische Dehnung
p_1^0, p_2^0, P_0, T_0	Referenzlasten	$\varepsilon^P, \dot{\varepsilon}^P$	plastische Dehnung und deren Rate
p_{sd}	Einspieldruck	ε^T	Temperaturdehnung
w_p	Dichte der plast. Dissipationsenergie	μ, μ_1, μ_2	Parameter
t	Zeit	$\rho, \dot{\rho}$	Eigenspannung und deren Rate
x	Ortsvektor	ρ_i	diskrete Eigenspannung
C_i	diskrete Gleichgewichtsbedingungen	$\bar{\rho}$	zeitunabhängige Eigenspannung
D, L	Lochradius, Scheibenhöhe	σ	aktuelle Spannung
E	Elastizitätstensor	σ, σ_u	Fließ-, Bruchspannung
J_2	zweite Invariante des Spannungstensors	σ^E	fiktive elastische Spannung
N, M	Normalkraft, Biegemoment	σ_i^E	diskrete fiktive elastische Spannung
NG, NV	Anzahl der Gaußpunkte und Lastecken	σ_{nL}	Nenn-, gemittelte Normalspannung
P, P_{el}, P_{elast}	aktueller und elastischer Druck	Φ	Fließfunktion
T	Temperatur	$\Omega, \partial\Omega$	Struktur und deren Rand
T_i, T_a	Innere und äußere Temperatur	\mathcal{L}	Lastbereich
W_p	maximale plast. Dissipationsenergie		

1 Einleitung

Hochbeanspruchte passive Komponenten lassen sich gerade im Anlagenbau oft erst bei Ausnutzung des überelastischen Bereiches wirtschaftlich betreiben. Daher beruht das Regelwerk hier auch auf einer inelastischen Spannungsbewertung. Bereits die Aufspaltung in Primär- und Sekundärspannungen ist ein Konzept, das im elastischen Bereich keine Bedeutung hat. Alle lokal linear superponierbaren Spannungen tragen gleich zum Erreichen der Fließgrenze bei. Jenseits dieser Grenze existiert kein begrenzender Stoffwert zur Kennzeichnung der Beanspruchbarkeit einer (innerlich) statisch unbestimmten Struktur. Deshalb muß eine Spannungsberechnung nach Regelwerk bewertet werden. Die Richtlinien zur Bewertung der mit 3-D Finite Element Analysen berechneten Spannungsergebnisse bleiben in der Diskussion [?].

Insbesondere die übliche von elastisch berechneten Spannungen ausgehende Bewertungspraxis stellt eine schwer begründbare Extrapolation dar [?]. Dieser Umweg wird unnötig, wenn man die Tragfähigkeit mittels der Finite Elemente Methode (FEM) direkt berechnen kann. Der Beitrag beschreibt einen solchen Weg, der in das FEM-Programm PERMAS implementiert wurde [?]. Die erste Implementation im Rahmen eines begonnenen Forschungsvorhabens beschränkt sich auf idealplastisches Stoffverhalten. Die Erweiterung auf verfestigendes Material wird einen der nächsten Schritte darstellen.

1.1 Einordnung in den Rahmen bestehender Bewertungsmethoden

Plastische Spannungsbewertung beruht heute implizit auf der Traglast- und Einspielanalyse einfacher Modellprobleme für idealplastisches Material [?], [?]. Diese geht - in ihrer klassischen Formulierung im Rahmen der geometrisch linearen Theorie[†] - von dem Konzept kritischer Strukturzustände (in Bild 1 dargestellt) aus:

- Unbeschränktes Fließen ist kritisch, weil es sofort zum plastischen Kollaps führt. Lasten unterhalb der Traglast (limit load) sind in diesem Sinne unkritisch.
- Inkrementeller Kollaps durch Akkumulation plastischer Dehnungen über aufeinanderfolgende Lastzyklen (Ratchetting) und plastische Ermüdung (Low Cycle Fatigue, LCF) durch alternierende Plastifizierung sind kritisch, weil sie zum Strukturversagen führen, wenn dieser Betriebszustand nicht verlassen wird. Lasten unterhalb der Einspiellast (shakedown load) sind in diesem Sinne unkritisch.

Diesen Versagensarten lassen sich zeitabhängige Festigkeiten zuordnen, wie es in Bild 2 für einen Zugstab unter reiner Schwellbeanspruchung dargestellt ist. Bei Belastung durch die Zugspannung σ_v erfolgt der Kollaps. Aber auch bei zyklischer überelastischer Last erfolgt ein Sofortausfall innerhalb weniger Zyklen durch plastische Ermüdung (LCF). Für ein Bauteil ist der Betriebs- oder Zeitfestigkeitsbereich auf den Bereich beschränkt, in dem die Komponente elastisch einspielt. Auch bei anfänglicher lokaler überelastischer Beanspruchung kann die Lebensdauer anhand einer (experimentell aufgenommenen) Wöhlerlinie ermittelt werden, wenn man zeigt, daß weder LCF noch Ratchetting auftreten [?]. Die Fließspannung ist die Einspiellast der statisch bestimmten Komponente Zugstab (siehe Bild 10). Die Einspielgrenze ist nur so scharf, wie es das Konzept einer Fließgrenze erlaubt, die das elastische vom plastischen Werkstoffverhalten trennt. Man kann auch ohne dieses Konzept eine Plastizitätstheorie aufbauen. Wir bleiben hier im Rahmen der technischen Plastizitätstheorie. Bei Werkstoffen, die zyklisch

[†] Geometrisch nichtlineare Theorien werden in [?] untersucht.

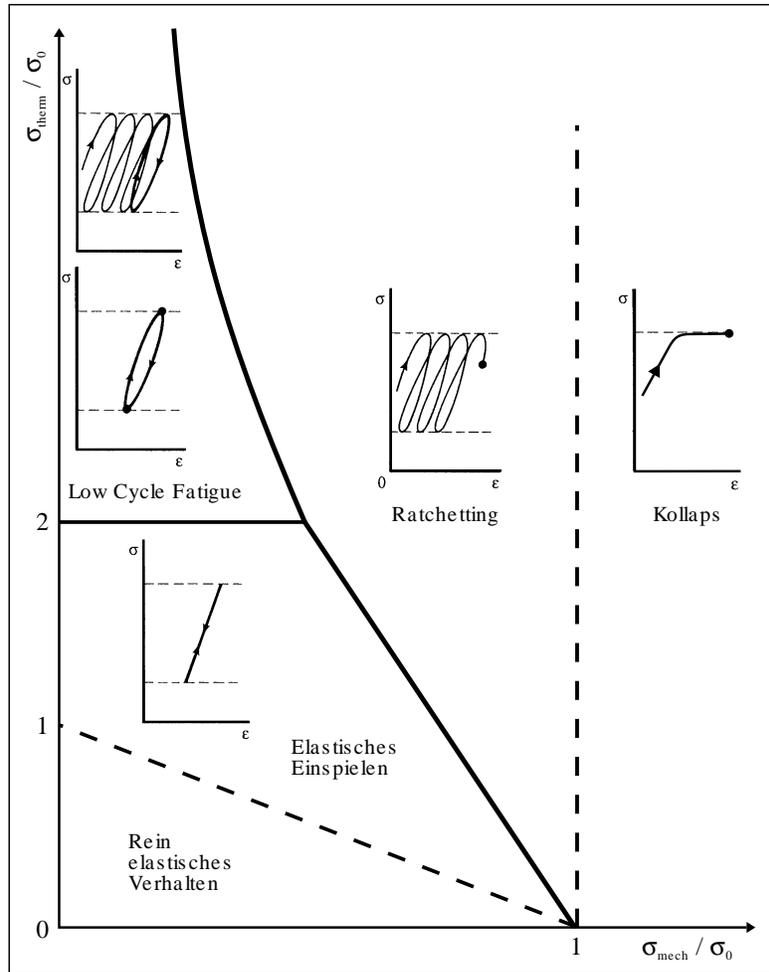


Abbildung 1: Bree-Interaktionsdiagramm für dünnwandige Rohre

stark ver- oder entfestigen, sind Einspielanalysen anhand der zyklisch stabilisierten Stoffwerte durchzuführen.

Aus einer inkrementellen Traglast-Berechnung eines Abzweigs (für eine genaue Analyse siehe [?]) erhält man eine Druck-Dehnungskurve (siehe Bild 3). Es ist der aufgebrachte Druck über der maximalen Vergleichsdehnung im Stutzenpunkt A aufgetragen. Die x- und y-Achse sind jeweils auf die elastische Vergleichsdehnung im Punkt A und auf den elastischen Druck normiert. Die Bauteilkurve (Bild 3) kann analog zur Werkstoffkurve (σ , ϵ -Diagramm) interpretiert werden, wenn man die elastische Grenze mit der Anfangsfließspannung σ_0 und die Traglast mit der Bruchspannung σ_u identifiziert.

Nach Belastung bis Fließbeginn wird der Innendruck bis auf den doppelten elastischen Innendruck gesteigert. Danach wird der Abzweig vollständig ent- und wiederbelastet. Dieser Ent- und Belastungsteil verläuft parallel zur ursprünglichen elastischen Gerade. Daraufhin wird die Struktur weiterbelastet. Die Ent- und Belastung hat darauf keinen Einfluß, so daß der Kollapsdruck unabhängig von der Lastgeschichte ist. Die nach der Entlastung verbleibenden plastischen Dehnungen korrespondieren mit den verbleibenden Eigenspannungen.

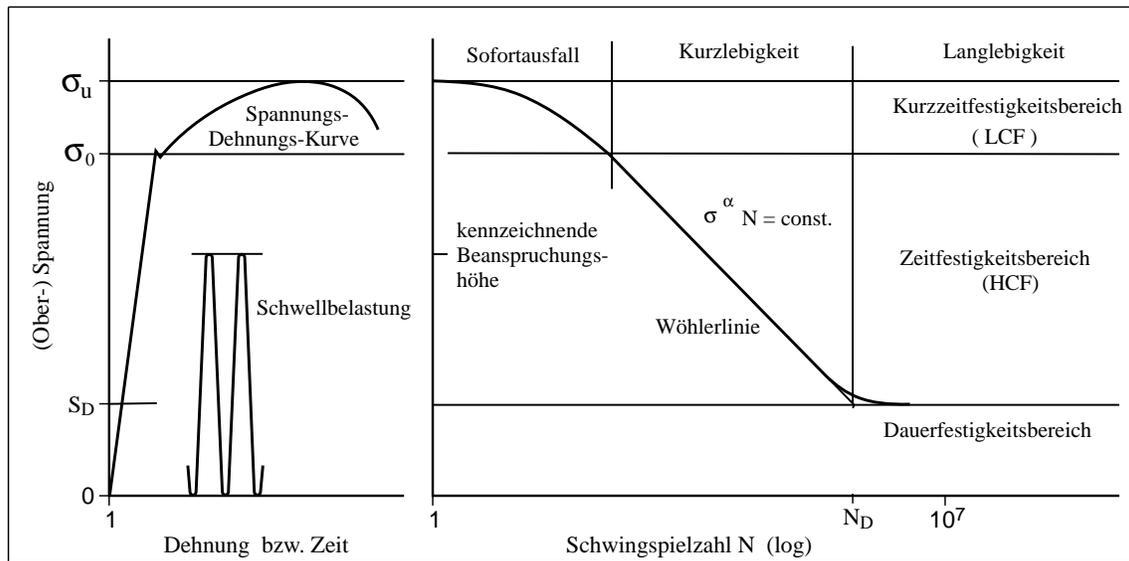


Abbildung 2: Betriebsfestigkeit des Zugstabes für Schwellbeanspruchung

Eigenspannungen, auch herstellungsbedingte, haben keinen Einfluß auf die Traglast sind also Sekundärspannungen ([?], siehe dazu auch die Experimente von Maier–Leibnitz [?]). Ganz entsprechend ist auch der Werkstoffwert σ_u eindeutig bestimmt und unabhängig von der Lastgeschichte. Die Kraft beim Bruch einer Zugprobe ist ihre Traglast. Die Traglastanalyse liefert nicht die Dehnungen beim Kollaps. Dehnungen und Verschiebungen hängen bei Zugstab und bei der Komponente (Bild 3) offensichtlich von der Lastgeschichte und von Eigenspannungen ab. Selbst wenn alle Bedingungen genau bekannt sind, sind diese kinematischen Größen mit zunehmend flacher verlaufender Belastungskurve ungenauer bestimmbar. Die statischen Größen sind die technisch wichtigeren Kennwerte. Das gilt für den Werkstoffwert σ_u ebenso wie für den Bauteilkennwert β_{limit} (Traglastfaktor). Bei starker Annäherung an diese Grenzen ist ausreichende Duktilität des Werkstoffs nachzuweisen oder es muß von abgeminderten Festigkeitskennwerten ausgegangen werden.

Die Spannungsbewertung überträgt die für sehr vereinfachte Modelle bekannten Trag- und Einspiellasten auf wesentlich kompliziertere technische Problemstellungen. Die nichtlineare Spannungsinteraktion von Primär- und Sekundärspannungen wird in Bild 1 in der Ebene der mechanischen und thermischen Umfangsspannungen im idealplastischen dünnen Rohr unter konstantem Innendruck und unter Thermozyklen dargestellt (Längsspannungen wurden von Bree konservativ vernachlässigt [?]). Das Interaktionsdiagramm ist ein regelgerechter Weg zur Bewertung der Spannungen in einer speziellen Komponente im Hinblick auf die genannten Versagensarten.

Die Grenze zum plastischen Kollaps in Bild 1 zeigt die allgemeingültige Aussage, daß Wärmespannungen Sekundärspannungen sind, weil die Traglast von ihnen unbeeinflußt ist. Insbesondere die Traglastgrenzen sind für typische Strukturelemente des Apparatebaus formelmäßig aufbereitet worden [?]. Trotzdem bleibt die Spannungsbewertung wichtiger Elemente wie Behälterabschlüsse, Rohrverzweigungen und -krümmer in der Diskussion [?],[?], [?]. Nicht unerwähnt soll die Bedeutung der Traglastanalyse in der bruchmechanischen Spannungsbewertung hochzäher Werkstoffe bleiben. Dies mag ein Zitat aus [?] verdeutlichen:

„ ... if toughness is sufficiently high, fracture mechanics ceases to be relevant to the problem

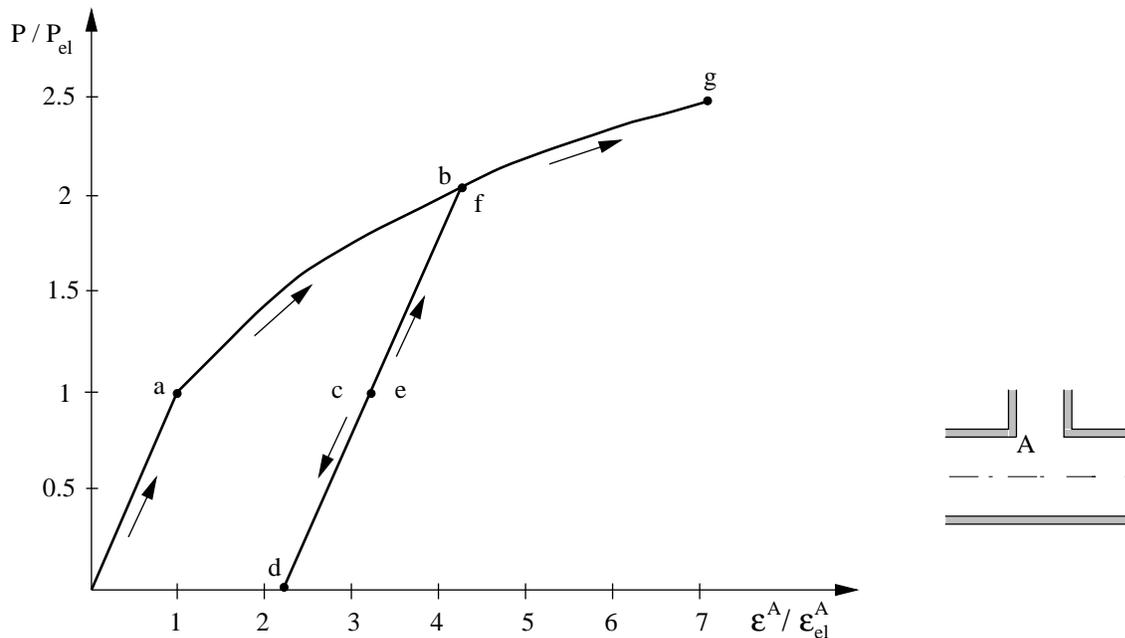


Abbildung 3: Druck–Dehnungskurve für Punkt A des Abzweigs (Bauteilkurve)

because failure stress is insensitive to toughness: a simple limit load analysis is all that is required to predict failure stress in a material with very high fracture toughness.“ Die Zwei-Kriterien-Methode benötigt die Traglasten von Rißkonfigurationen, um den gesamten Bereich vom Sprödbbruch bis zum Kollaps des Ligaments zu beschreiben [?].

2 Traglast und elastisches Einspielen

Die statischen Sätze der Traglast- und Einspielanalyse sind in den Spannungen formuliert und ergeben ein mathematisches Maximierungsproblem für sichere Lasten. Die maximale sichere Last ist bei Ausschluß von Strukturkollaps die Traglast und bei Vermeidung von Ratchetting und LCF die (elastische) Einspiellast. Demgegenüber sind die kinematischen Sätze in kinematischen Größen formuliert. Sie definieren ein mathematisches Minimierungsproblem für unsichere Zustände und führen zu einer dualen Formulierung für die obere Schranke der Trag- und Einspiellast. Jede zulässige Lösung des statischen Satzes ist eine untere, jede Lösung des kinematischen Satzes eine obere Schranke für die sichere monotone bzw. variable Last (siehe [?]). Nach dem Dualitätssatz (siehe z. B. [?]) ist die größte untere Schranke gleich der kleinsten oberen Schranke, so daß die exakte Lösung beliebig genau erreicht werden kann. Um konservative Lösungen zu erhalten, werden nur die statischen Sätze angewandt.

Statischer Traglastsatz:

Eine elasto–plastische Struktur kollabiert nicht unter einer monotonen Last, wenn sie im statischen Gleichgewicht ist und die Fließfunktion nirgends verletzt ist. Die Traglast ist die maximale sichere Last.

Statischer Einspielsatz:

Eine elasto–plastische Struktur versagt nicht plastisch (durch LCF oder Ratcheting) unter einer variablen Last, wenn sie im statischen Gleichgewicht ist, die Fließfunktion nirgends verletzt ist und alle plastischen Dehnungsänderungen verschwinden, d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\epsilon}^P(t) = \mathbf{0}$. Die Einspiellast ist die maximale sichere Last.

Der Unterschied zwischen rein elastischem Verhalten und elastischem Einspielen kann nur bei Kenntnis der gesamten Belastungsgeschichte erkannt werden, da sich die Struktur bei elastischem Einspielen irgendwann rein elastisch verhält. Ausgehend von den Grundgleichungen der technischen Plastizitätstheorie werden Traglast- und Einspielsatz zur direkten Berechnung tragbarer Lasten als Optimierungsproblem mathematisch formalisiert.

Die gegebene Struktur Ω besteht aus Materialpunkten, die durch ihre Ortsvektoren $\mathbf{x} \in \Omega$ repräsentiert werden. Die Bewegung eines materiellen Punktes \mathbf{x} in der Zeit t wird durch die Verschiebung $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ beschrieben. In der hier vorausgesetzten geometrisch linearen Theorie besteht eine lineare kinematische Beziehung zwischen den Verschiebungen \mathbf{u} und den Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}$ in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$. Diese Dehnungen können additiv in elastische, plastische und thermische Dehnungen zerlegt werden:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^E + \boldsymbol{\epsilon}^P + \boldsymbol{\epsilon}^T. \quad (1)$$

Für ein elastisch, ideal plastisches Material treten plastische Dehnungen $\boldsymbol{\epsilon}^P$ nur dann auf, wenn eine Fließfunktion Φ eine materialabhängige Fließspannung σ_0 erreicht. Hier wird die von Mises Fließfunktion mit der zweiten Invarianten J_2 des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ gewählt:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = 3J_2 \leq \sigma_0^2. \quad (2)$$

Weiterhin wird Stabilität im Sinne des Druckerschen Postulats gefordert, d.h. die Arbeit einer angreifenden Kraft an den Dehnungsänderungen soll nicht negativ sein:

$$(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^s) \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \geq 0. \quad (3)$$

$\boldsymbol{\sigma}^s$ ist eine Spannung, die die Fließfunktion erfüllt. Daraus folgt, daß die Fließfunktion durch $\Phi = \sigma_0^2$ ein konvexes Gebiet begrenzt (siehe [?]).

Für einen monoton wachsenden Lastfaktor β lauten die notwendigen Bedingungen für einen sicheren Zustand der Struktur Ω mit dem Lastrand $\partial\Omega_\sigma$, dem äußeren Normalenvektor \mathbf{n} , der Fließfunktion Φ , der Volumenlast $\beta\mathbf{b}$ und der Oberflächenlast $\beta\mathbf{p}$:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0^2 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \beta\mathbf{b} \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \beta\mathbf{p} \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \quad (6)$$

Der größtmögliche Faktor, der diese Bedingung erfüllt lautet *Traglastfaktor* $\beta_{limit} = \max \beta$. Dies führt zu einem mathematischen Optimierungsproblem in der statischen Größe $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\max \quad \beta \quad (7)$$

$$\text{unter} \quad \text{Erfüllung von Bedingung (4) – (6)}. \quad (8)$$

Bei zeitlich veränderlicher Belastung wird die Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ in eine fiktive elastische Spannung $\boldsymbol{\sigma}^E$ und in eine Eigenspannung $\boldsymbol{\rho}$ zerlegt:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^E + \boldsymbol{\rho}. \quad (9)$$

$\boldsymbol{\sigma}^E = \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}$ sind Spannungen, die in einem unendlich elastischen Material aufträten, so daß die Eigenspannungen $\boldsymbol{\rho}$ aus den plastischen Deformationen resultieren. Die Eigenspannungen $\boldsymbol{\rho}$ erfüllen die homogenen statischen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\rho} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega_\sigma. \quad (11)$$

Ein mögliches Kriterium für das *elastische Einspielen* einer Struktur aus elastisch, ideal plastischem Material ist, daß die plastischen Dehnungsraten $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P$ und damit die Eigenspannungsraten $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ für eine gegebene Belastung $\mathbf{P}(t) = (\mathbf{b}, \mathbf{p})$ im Lastbereich \mathcal{L} verschwinden:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

In jedem untersuchten Versagensmechanismus existiert ein Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ für den die Gleichungen (12) nicht erfüllt sind. Das heißt, es existiert mindestens ein Punkt \mathbf{x} für den die Dichte der plastischen Dissipationsenergie w_p

$$w_p(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \tau) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^P(\mathbf{x}, \tau) d\tau \quad (13)$$

im Laufe der Zeit über alle Schranken wächst. Um die Möglichkeit des lokalen Materialversagens zu verhindern muß zusätzlich die maximal mögliche plastische Dissipationsenergie

$$W_p(\mathbf{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} w_p(\mathbf{x}, t) \leq c(\mathbf{x}) \quad (14)$$

in allen Punkten $\mathbf{x} \in \Omega$ beschränkt bleiben. Zu dieser erweiterten Theorie siehe König in [?]. Folgender statischer Einspielsatz gilt [?], [?]:

Satz (Melan):

Existiert ein Faktor $\beta > 1$ und zeitunabhängige Eigenspannungen $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$ mit $\int_\Omega \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E} : \bar{\boldsymbol{\rho}} d\Omega < \infty$, so daß für alle Lasten $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$

$$\Phi[\beta \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (15)$$

erfüllt ist, so wird die Struktur unter dem Lastbereich \mathcal{L} elastisch einspielen.

Der größte Wert β_{SD} , der den Satz erfüllt heißt (elastischer) *Einspielfaktor* (shakedown-factor). Ziel der Traglast- und Einspielanalyse ist die Berechnung von β_{limit} und von β_{SD} . Dies führt zu dem mathematischen Optimierungsproblem

$$\max \quad \beta \quad (16)$$

$$\text{unter} \quad \Phi[\beta \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})] \leq \sigma_0^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (18)$$

$$\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_\sigma. \quad (19)$$

Da das Druckersche Postulat vorausgesetzt wurde, ist dies ein konvexes Maximierungsproblem, so daß ein lokales Maximum des Problems auch das globale Maximum ist (siehe z.B. [?]). Daher führt der Satz zu einem eindeutig berechenbaren Einspielfaktor. Das Problem hat mit den Materialpunkten unendlich viele Nebenbedingungen, welche durch eine FE Diskretisierung reduziert werden. Durch die Einspielanalyse erhält man einen begrenzenden sicheren Lastbereich in dem die Lasten mit beliebiger Lastgeschichte variieren können. Im Allgemeinen sind diese Lastbereiche konvexe Polyeder. Fallen alle Ecken dieser Polyeder in einem Punkt zusammen, so charakterisiert dieser die monotone Belastung der Struktur, so daß die Traglastanalyse ein Spezialfall der Einspielanalyse ist.

Bei hoher Temperaturbelastung können Effekte auftreten, die bei Raumtemperatur kaum eine Rolle spielen (z.B. Kriechen und temperaturabhängige Fließspannung). Hier wird nur eine Erweiterung der statischen Sätze für temperaturabhängige Fließspannung angegeben, wobei angenommen wird, daß die Gestalt der Fließfläche nicht von der Temperatur abhängt. Die Fließspannung sei eine monoton fallende Funktion der Temperatur T , d.h.

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leq \sigma_0^2(T) \quad \text{und} \quad \sigma_0(T_1) \leq \sigma_0(T_2) \quad \forall T_1 \geq T_2. \quad (20)$$

Kann die Temperaturabhängigkeit des E-Moduls vernachlässigt werden, so läßt sich der statische Einspielsatz erweitern (siehe [?], [?]):

Satz:

Existiert ein Faktor $\beta > 1$ und zeitunabhängige Eigenspannungen $\bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})$ mit $\int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\rho}} : \mathbf{E} : \bar{\boldsymbol{\rho}} d\Omega < \infty$, so daß für alle Lasten $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$

$$\Phi[\beta \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, T, t) + \bar{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{x})] \leq \sigma_0^2(T) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (21)$$

erfüllt ist, so spielt die Struktur unter dem Lastbereich \mathcal{L} elastisch ein.

3 Diskretisierung und Optimierung

Aufgrund der Schwierigkeit unendlich viele Nebenbedingungen zu erfüllen wird die Struktur in Finite Elemente mit NG Gaußpunkten i diskretisiert. Das FE-Programm PERMAS berechnet die lastabhängigen elastischen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_i^E(t)$ nach der Verschiebungsmethode (siehe [?]). Die diskretisierten homogenen Gleichgewichtsbedingungen der diskreten Eigenspannungen $\bar{\boldsymbol{\rho}}_i$ lauten (siehe [?] und [?])

$$\sum_{i=1}^{NG} \mathbf{C}_i \bar{\boldsymbol{\rho}}_i = \mathbf{0}. \quad (22)$$

Dies ist die diskrete Formulierung der Gleichungen (18) und (19). Die Eigenspannungen $\bar{\boldsymbol{\rho}}_i$ bilden damit einen linearen Vektorraum. Die Belastung $\mathbf{P}(t)$ wird als Konvex-Kombination der NV Lastecken $\mathbf{P}(j)$ des konvexen Lastraumes \mathcal{L} betrachtet, so daß die Nebenbedingungen (17) nur noch in diesen Lastecken überprüft werden müssen (siehe [?] und [?]). Mit den diskretisierten fi ktiven elastischen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}_i^E(j)$ zur Lastecke $\mathbf{P}(j)$ lautet die diskretisierte Fassung von Gleichung (17):

$$\Phi[\beta \boldsymbol{\sigma}_i^E(j) + \bar{\boldsymbol{\rho}}_i] \leq \sigma_0^2 \quad i = 1, \dots, NG, \quad j = 1, \dots, NV. \quad (23)$$

Die Unbekannten des diskreten Problems sind der Lastfaktor β und die zeitunabhängigen Eigenspannungen \bar{p}_i . Durch direkte Ansätze der Eigenspannungen erhält man jeweils untere Schranken für den optimalen Lastfaktor, z. B. kann jede thermische Spannung als Eigenspannung angesetzt werden (siehe [?]). Bei rein mechanischen Problemen müßte dazu aber zusätzlich eine thermische Rechnung erfolgen. Weiterhin ist nicht immer klar, wie das thermische Problem aussehen sollte, damit es mechanische Lasten gut repräsentiert. Deshalb werden die Eigenspannungen hier wie in [?], [?], [?] aus den mechanischen Lasten über eine plastische Gleichgewichtsiteration berechnet.

Allgemein ist die diskretisierte Einspielanalyse für ein realistisches FE-Modell ein sehr großes Optimierungsproblem. Mittels einer Basisreduktionstechnik im Eigenspannungsraum kann die Anzahl der Unbekannten so reduziert werden, daß nur noch wenige (4 bis 7) betrachtet werden müssen (siehe [?], [?] und [?]). In jedem Reduktionsschritt wird das Problem mit Hilfe des SQP-Verfahrens gelöst (siehe [?] und [?]). Die Basisreduktion wurde in einer unveröffentlichten Arbeit von Prager vorgeschlagen und von Shen in [?] und von Zhang in [?] weiterentwickelt.

4 Beispiele

Als erste Anwendung der FEM basierten Traglast- und Einspielanalyse werden Beispiele mit lokal hoher Beanspruchung untersucht für die teilweise analytisch gewonnene Ergebnisse zum Vergleich vorliegen. Alle Berechnungen wurden auf derselben Workstation mit PERMAS IV durchgeführt (siehe [?]). Die Rechenzeiten bewegen sich zwischen dem 2 bis 10-fachen einer elastischen Analyse. Das ist ein Bruchteil der inelastischen Analyse der vollständigen Lastgeschichte. Zudem wird bei der direkten Tragfähigkeitsanalyse kein numerischer Fehler über die Lastzyklen akkumuliert ([?]).

4.1 Quadratische Scheibe mit kreisrundem Loch

Zuerst wird eine quadratische Scheibe mit kreisrundem Loch unter zweiachsiger Zug/Druck-Belastung p_1 und p_2 untersucht. Für unterschiedliche Verhältnisse D/L wurden für $p_2 = 0$ und $p = p_1$ Traglast- und Einspielanalysen durchgeführt. Aus Symmetriegründen wird ein Viertel der Scheibe mit 200 ebene 9-knotige Membranelemente (QUAM9) diskretisiert (siehe Bild 4). Die Elementspannungen werden in den 4 Ecken der Elemente untersucht, so daß man 800 Knotenspannungen zur Verfügung hat.

Die Ergebnisse für die Scheibe unter einachsiger Zugbelastung ($p_1 = p$, $p_2 = 0$) sind in Bild 5 festgehalten. Dabei sind die elastische, Einspiel- und Traglast über den unterschiedlichen Quotienten D/L aufgetragen. Für $D/L \rightarrow 0$ konvergiert die elastische Belastung gegen die analytische Lösung der unendlichen Scheibe mit rundem Loch, d. h. $p/\sigma_0 = 1/3$ bei Fließbeginn (siehe z.B. [?]: Problem von Kirsch). Ältere Einspielrechnungen für die Lochscheibe sind in [?] zusammengestellt. Für $D/L \rightarrow 1$ konvergiert sie gegen 0. Die Traglasten für die unterschiedlichen Geometrien stimmen gut mit den bekannten analytischen Schranken überein (siehe [?], [?] und [?]). Für $D/L = 0.2$ fallen untere und obere Schranke zusammen, so daß man die exakte analytische Lösung $p_{limit} = (1 - D/L)\sigma_0 = 0.8\sigma_0$ erhält (siehe [?]). Die CPU-Zeit für eine Traglastanalyse ist etwa 10mal kürzer als für eine plastische inkrementelle Rechnung. Die Traglast ist nach 10 Unterraumiterationen mit einem Fehler von 1% erreicht.

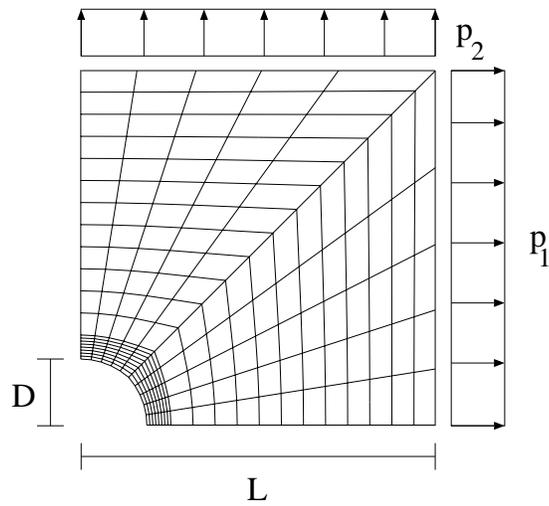


Abbildung 4: FE-Netz der Scheibe mit Belastung und Vermaßung

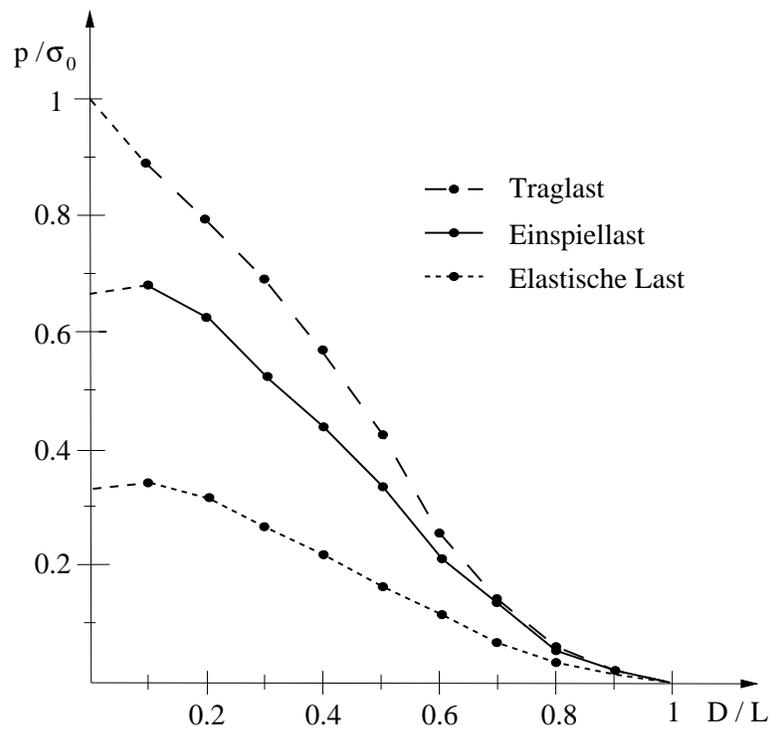


Abbildung 5: Elastische, Einspiel- und Traglast der Scheibe unter einachsiger Zugbelastung

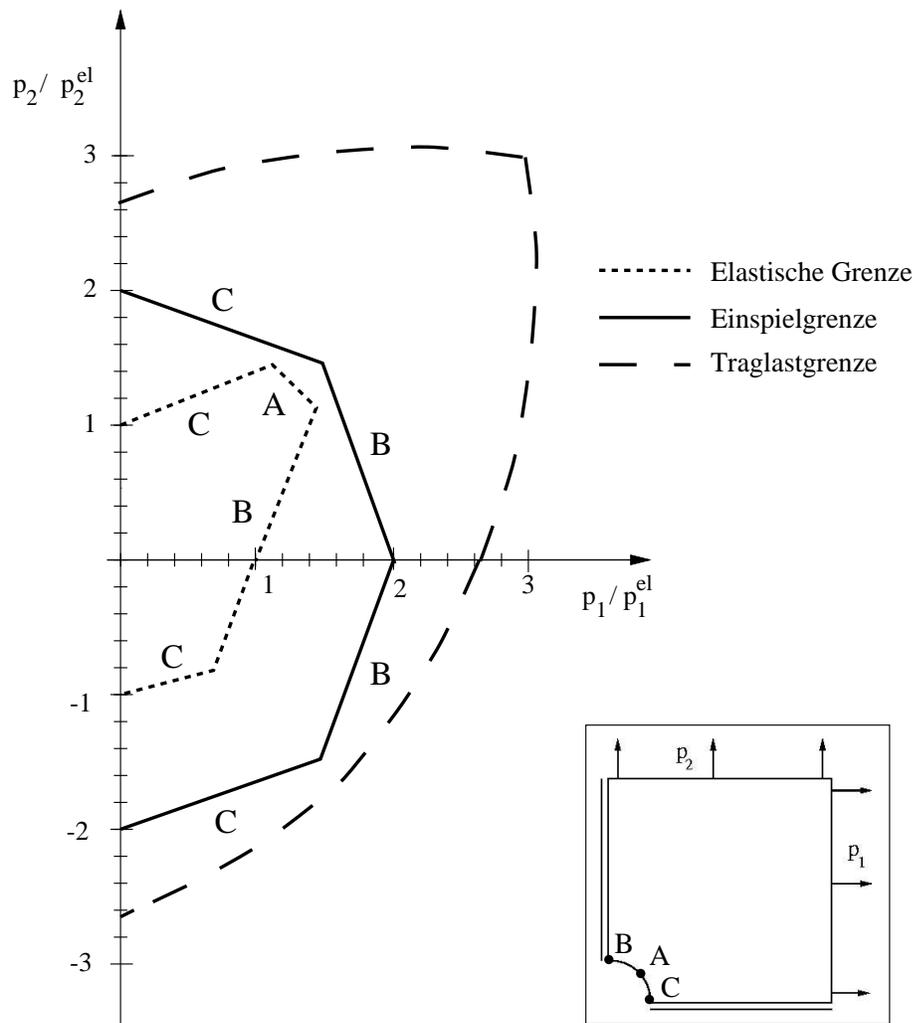


Abbildung 6: Interaktionsdiagramm der quadratischen Scheibe für $D/L = 0.2$

Folgende Lastbereiche wurden bei der Einspielanalyse untersucht.

1. Beim zweiachsigen Zug können $p_1, p_2 \geq 0$ unabhängig voneinander variieren:

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 &\leq \beta \mu_1 p_1^0, & 0 \leq \mu_1 &\leq 1 \\ 0 \leq p_2 &\leq \beta \mu_2 p_2^0, & 0 \leq \mu_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

2. Bei Zug- und Druckbelastungen können $p_1 \geq 0$ und $p_2 \leq 0$ unabhängig voneinander variieren:

$$\begin{aligned} 0 \leq p_1 &\leq \beta \mu_1 p_1^0, & 0 \leq \mu_1 &\leq 1 \\ 0 \geq p_2 &\geq \beta \mu_2 p_2^0, & 0 \leq \mu_2 &\leq 1. \end{aligned}$$

p_1^0 und p_2^0 sind Referenzbelastungen.

Die elastische Grenze ist durch den Punkt bestimmt, in dem die Scheibe zuerst fließt. Die unterschiedlichen Teile der elastischen Grenzkurve sind im Interaktionsdiagramm (Bild 6) durch

die anfänglichen Fließpunkte A, B und C gekennzeichnet. Bild 6 stimmt sehr gut mit den Ergebnissen in [?] überein. Dort wurde jedoch das zum Fließpunkt A gehörende Segment in der elastischen Grenze nicht angegeben.

Bei variabler Belastung versagt die Scheibe lokal in den Punkten B oder C. Die Teile der Einspielgrenze sind durch ihren Versagenspunkt markiert. Bei der Zug/Druckbelastung stimmen anfänglicher Fließpunkt und Versagenspunkt überein und der Einspielfaktor bezogen auf die elastische Lösung ist näherungsweise gleich 2. Dies stimmt mit der analytischen Lösung von Zhang [?] überein. Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Struktur zwischen β_{SD} und β_{limit} in allen untersuchten Belastungen lokal durch alternierende Plastifizierung (LCF) versagt.

4.2 Flachstab mit Außenkerbe

Als zweites Beispiel wird ein Flachstab mit einer Außenkerbe unter Zug- und Momentenbelastung N und M untersucht. Für unterschiedliche Verhältnisse D/L wurde die Traglast- und Einspielanalyse für reinen Zug ($M = 0$) durchgeführt. Im untersuchten Beispiel gilt $h = 1.5L$. Für diese Rechnungen wurde aus Symmetriegründen je nach Lastfall nur ein Viertel oder die Hälfte des Stabes (siehe Bild 7) untersucht. Die untersuchten Modelle haben 200 ebene 9-knotige Membranelemente (QUAM9). Die Elementspannungen werden in den 4 Ecken der Elemente untersucht, so daß 800 Knotenspannungen zur Verfügung stehen. Die Ergebnisse für

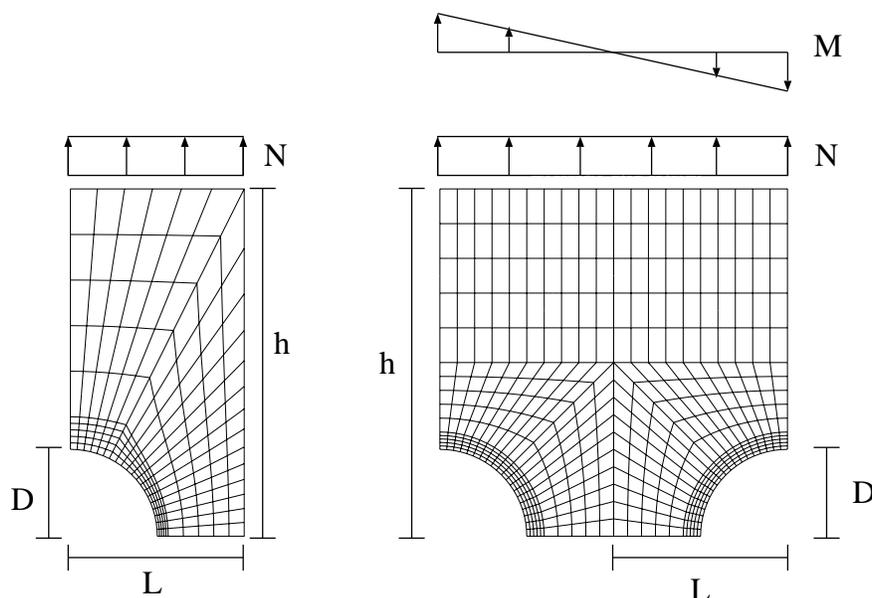


Abbildung 7: FE-Netze des gekerbten Flachstabes für $D/L = 0.5$ mit Belastungen

die Zugbelastung sind in Bild 8 festgehalten. Dabei sind die elastische, Einspiel- und Traglast über den Quotienten D/L aufgetragen. Für das Verhältnis $D/L = 0.5$ ergibt sich nach [?] die Formzahl

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nL}} = 1.498$$

bezogen auf die Nennspannung σ_{nL} (gemittelte Normalspannung) im engsten Querschnitt L (Ligament). σ_{max} ist die maximal auftretende Vergleichsspannung im Kerbgrund. Aufgrund des Verhältnisses $D/L = 0.5$ lautet die Formzahl bezogen auf den ungeschwächten Querschnitt $\tilde{\alpha}_k = 2.996$. Die elastische Grenzspannung bei reinem Zug ergibt sich zu $\sigma_{elast} = 0.33\sigma_0$; im Kerbgrund ist eine ca. 3-fache Spannungserhöhung vorhanden. Die mit der FEM berechnete elastische Grenzlast lautet $\sigma_{elast} = 0.31\sigma_0$.

Bis zu einem Verhältnis $D/L = 0.4$ ist der Einspielfaktor bezogen auf die elastische Grenze bei reiner Zugbelastung näherungsweise gleich 2, der Stab versagt durch LCF. Für größere Verhältnisse fallen Einspielfaktor und Traglastfaktor zusammen, so daß keine Erhöhung über die Einspiellast hinaus möglich ist.

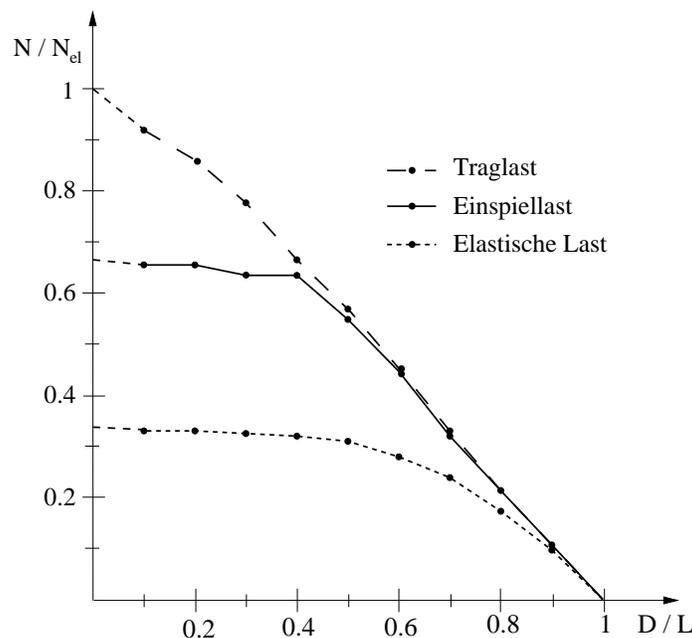


Abbildung 8: Elastische, Einspiel- und Traglast des gekerbten Flachstabes unter Zugbelastung

Für das Interaktionsdiagramm in Bild 9 wurde ein Flachstab mit dem Verhältnis $D/L = 0.5$ untersucht. Im Lastbereich der Einspielanalyse können das Moment M und die Zugbelastung N unabhängig voneinander variieren

$$\begin{aligned} 0 &\leq M \leq \beta\mu_1 M_0, & 0 &\leq \mu_1 \leq 1 \\ 0 &\leq N \leq \beta\mu_2 N_0, & 0 &\leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Die elastische Grenze ist in beiden Lastfällen linear von den Proportionalitätsfaktoren zwischen M_0 und N_0 abhängig. Zum Vergleich zeigt Bild 10 das Interaktionsdiagramm für den ungekerbten Stab. Für die elastische Grenze, Einspiel- und Traglastgrenze eines ideal plastischen Balkens mit rechteckigem Querschnitt läßt sich nach [?] herleiten:

$$\text{Elastische Grenze: } \frac{M}{M_{el}} = 1 - \frac{N}{N_{el}} \quad (24)$$

$$\text{Einspielgrenze: } \frac{M}{M_{el}} = \min \left\{ 1, 2 \left(1 - \frac{N}{N_{el}} \right) \right\} \quad (25)$$

$$\text{Traglastgrenze: } \frac{M}{M_{el}} = \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{N}{N_{el}} \right)^2 \right] \quad (26)$$

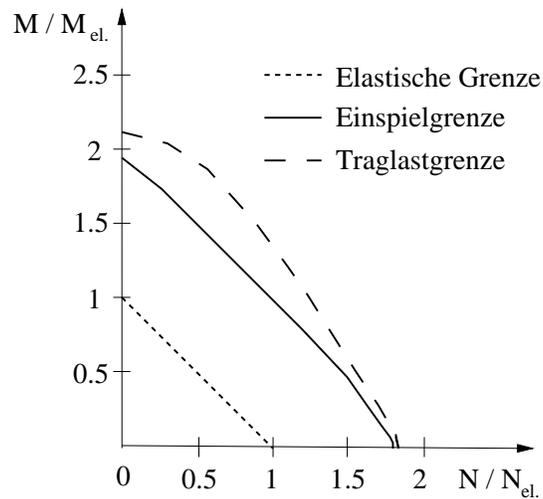


Abbildung 9: Interaktionsdiagramm des gekerbten Flachstabes mit $D/L = 0.5$

Bei reiner Biegung wie auch bei reinem Zug kann der ungekerbte Stab keine überelastischen zyklischen Lasten ertragen. Ein statisches reines Biegemoment kann dagegen bis zum 1.5-fachen der elastischen Beanspruchung getragen werden.

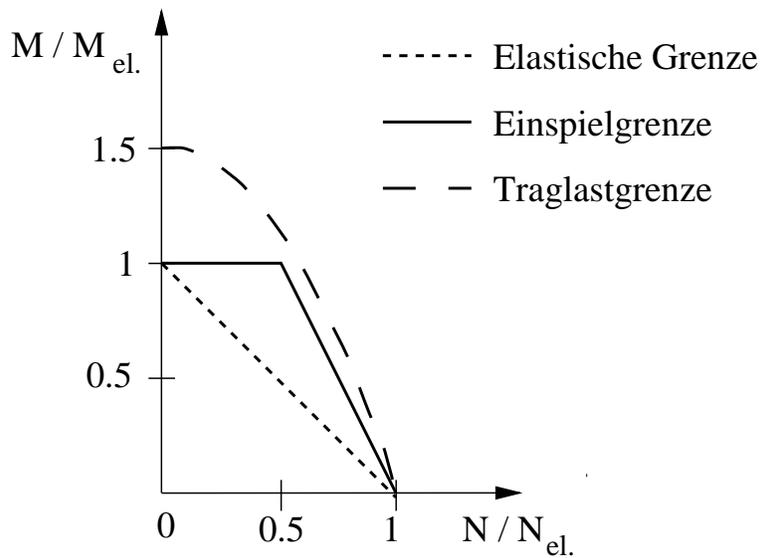


Abbildung 10: Interaktionsdiagramm des Rechteckbalkens als Modell für den ungekerbten Flachstab

4.3 Dünnes Rohr

Als drittes Beispiel wird ein Modell des unendlich langen dünnen Rohres untersucht. Das Rohr mit dem Radius r und der Wandstärke s mit $s/r = 0.1$ ist an beiden Enden abgeschlossen (siehe Bild 11). Das Rohr wurde durch ein rotationssymmetrisches 4-knotiges Element (QUAX4)

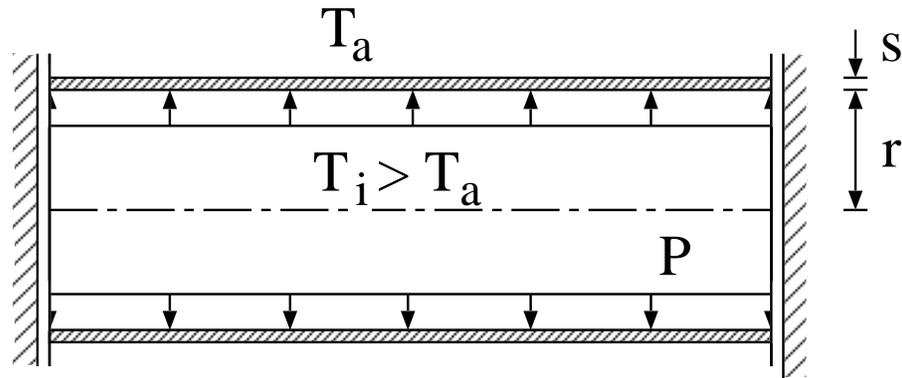


Abbildung 11: Dünnes Rohr unter Innendruck und Temperaturbelastung

diskretisiert. Es ist durch Innendruck P und durch ein achsensymmetrisches quasi-statisches Temperaturfeld T belastet. Dabei ist $T = T_i - T_a$ gesetzt, mit linearem Temperaturverlauf zwischen der Innentemperatur T_i und der Außentemperatur T_a . Für $T_i = T_a$ und $P = 0$ sei das Rohr spannungsfrei. Wir beschränken uns auf temperaturunabhängige Materialdaten (E-Modul, Querkontraktionszahl und Fließspannung).

Folgende Lastbereiche werden untersucht:

1. Der Druck P und die Temperatur T_i variieren simultan mit einem Proportionalitätsfaktor (ein-parametrische Belastung):

$$\begin{aligned} 0 \leq P \leq \beta\mu P_0, & \quad 0 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq T_i \leq \beta\mu T_0, & \quad 0 \leq \mu \leq 1. \end{aligned}$$

P_0 und T_0 sind jeweils ein Referenzdruck und eine Referenztemperatur.

2. Der Druck P und die Temperatur T_i variieren unabhängig voneinander (zwei-parametrische Belastung)

$$\begin{aligned} 0 \leq P \leq \beta\mu_1 P_0, & \quad 0 \leq \mu_1 \leq 1 \\ 0 \leq T_i \leq \beta\mu_2 T_0, & \quad 0 \leq \mu_2 \leq 1. \end{aligned}$$

Im Interaktionsdiagramm (Bild 12) sind die Einspielgrenzen für die unterschiedlichen Belastungen aufgetragen. Bei proportionaler Belastung ist der Einspielfaktor gleich 2, bis der Innendruck den Kollapsdruck erreicht hat. Bis dahin versagt das Rohr an der Innenseite durch LCF. Übersteigt der doppelte elastische Innendruck jedoch den Kollapsdruck, ist keine weitere Drucksteigerung möglich. Da die thermischen Spannung Eigenspannungen sind, haben sie keinen Einfluß auf den Kollapsdruck. Der analytische elastische Druck ist $P_{elast} = \sigma_0/9.98$ und der analytische Traglastfaktor für den Innendruck ist $\beta_{limit} = 1.0983$, so daß der Kollapsdruck

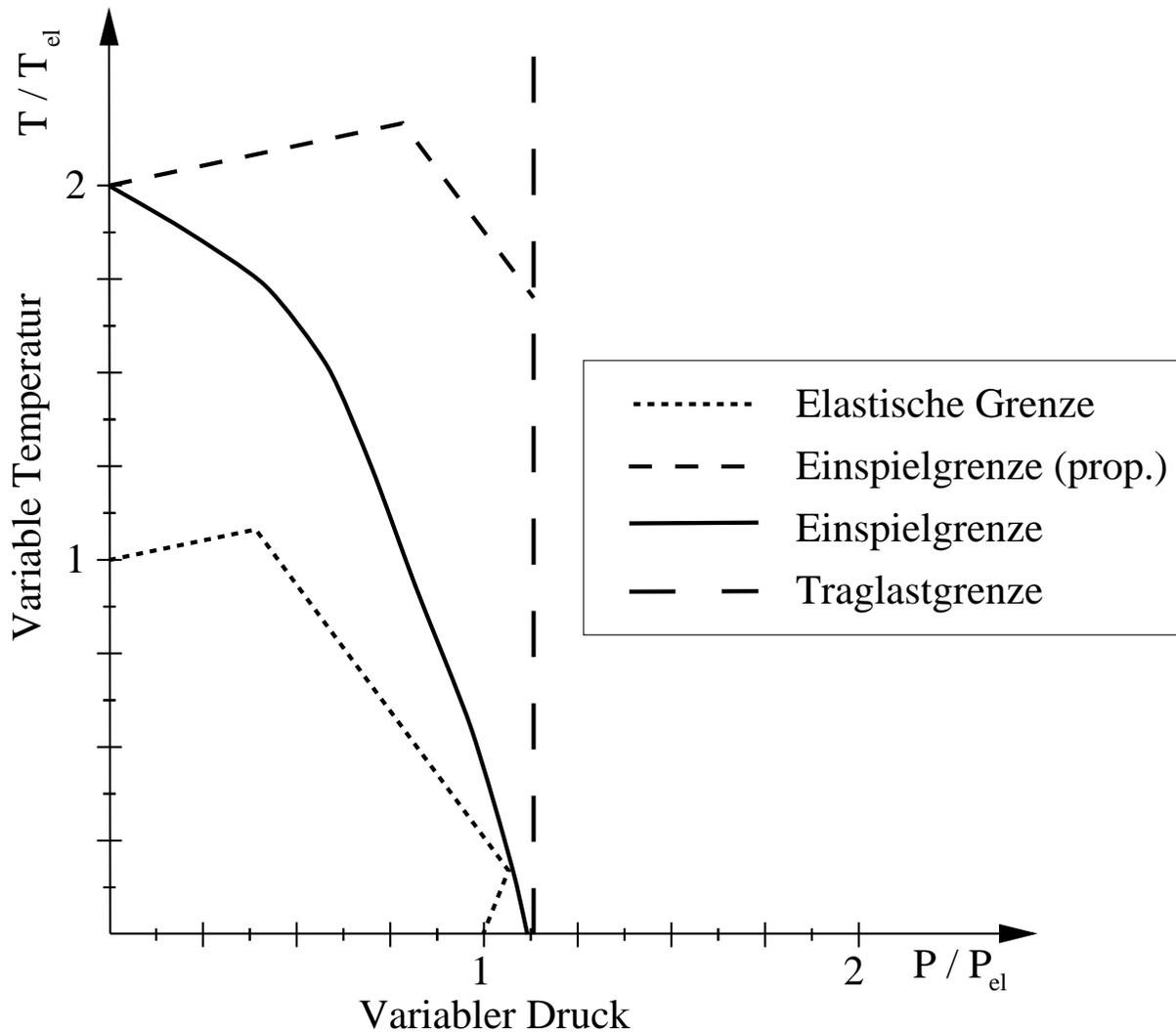


Abbildung 12: Interaktionsdiagramm des dünnen Rohres

etwa 10 % über dem elastischen Druck liegt (siehe dazu z. B. [?]). Bei geringer thermischer Last kann die mechanische Last über die Last $P - el$ bei Fließbeginn ohne thermische Last ist bei proportionaler Belastung niedriger als mit kleiner thermischer Zusatzlast. Allerdings liegt die Traglast dann nur noch etwa 3 % über der elastischen Lösung. Im zweiten Lastfall fallen die elastische Grenze und die Einspielgrenze sogar teilweise mit weniger als 1% Differenz zusammen. In [?] werden analoge Ergebnisse erhalten. Das Interaktionsdiagramm (Bild 12) unterscheidet sich jedoch wesentlich von dem Bree-Diagramm [?] für das unendlich dünne Rohr unter statischem Innendruck und zyklischen thermischen Lasten.

5 Zusammenfassung und Schlußfolgerung

Die übliche FEM-Analyse ermittelt aus gegebenen Belastungen sehr genau den Spannungs- und Verformungszustand einer Komponente. Daran wird die Belastbarkeit beurteilt, indem die

Spannungen mit zulässigen Werten verglichen werden. Diese Bewertung beruht implizit auf Traglast- und Einspielanalysen einfacher Modellprobleme und ist daher oft sehr konservativ. Die direkte Traglast- und Einspielanalyse geht den umgekehrten Weg. Sie berechnet die Belastbarkeit des Bauteils aus den Festigkeitskennwerten des Werkstoffs. Dieses inverse Problem stellt die eigentliche Aufgabe der strukturmechanischen Bauteilbewertung dar. Der direkte Weg scheiterte bislang daran, daß dafür keine geeignete FEM Software entwickelt worden ist. In dem Beitrag wird eine erste Entwicklung FEM basierter Traglast- und Einspielanalysen für ein allgemeines FEM Programm vorgestellt. Inelastische Analysen werden in der FEM als lineares Gleichungssystem formuliert und iterativ gelöst. Traglast- und Einspielanalysen führen dagegen auf große nichtlineare Optimierungsprobleme, die erst implementiert werden müssen und die nicht ohne „Tricks“ lösbar sind.

Die Beispiele typischer Komponenten zeigen, daß sich die Aufgabe mit der FEM sehr genau und effektiv lösen läßt. Details von Lastgeschichte und Stoffgesetz werden nicht benötigt. Traglast- und Einspielanalysen berechnen jedoch nicht die Deformationen bei Kollaps oder bei Ratchetting.

Die Traglast- und Einspielanalyse überträgt die Festigkeitskennwerte Bruchspannung und Fließspannung auf die Bauteilkennwerte Traglast und Einspiellast (bzw. auf die zugehörigen Lastfaktoren). Diese Kennwerte wurden in Interaktionsdiagrammen dargestellt. Damit wird ein Überblick über die Tragfähigkeit des Bauteils im Lastraum gewonnen, der günstige Betriebsbereiche der Komponente aufzeigt. In vielen Fällen ist der nutzbare überelastische Bereich wesentlich größer als der elastische Bereich. Viele Komponenten lassen sich erst durch Nutzen dieser Erweiterung wirtschaftlich betreiben. Dies gilt insbesondere bei der Interaktion primärer und sekundärer Spannungen. Ebenso kann man in den Interaktionsdiagrammen erkennen, daß sich aufwendige inelastische Analysen der Lastgeschichte kaum lohnen, wenn Trag- und Einspiellast nur unwesentlich größer als die Last bei Fließbeginn sind. Die direkte Berechnung der Tragfähigkeit bedeutet einen Fortschritt in der Sicherheitsanalyse passiver Komponenten. Dazu liefert die Traglastanalyse auch ein strukturmechanisches Verfahren zur Beurteilung rißbehaffeter Bauteile aus zähem Material.

In zukünftigen Arbeiten soll die Anwendbarkeit des Verfahrens auf sehr große FEM-Modelle und auf verfestigendes Material erweitert werden. Der Ausbau zur probabilistischen Traglast- und Einspielanalyse soll einen weiteren Schwerpunkt bilden. Die Erweiterung auf große Verformungen bleibt eine Herausforderung.