

# **Einspielen und Ratchetting bei Zug- und Torsionsbelastung: Analyse und Experimente**

## **Shakedown and ratchetting under tension-torsion loadings: analysis and experiments**

M. Heitzer, H. Reinders, F. Schubert, Forschungszentrum Jülich GmbH, D-52425 Jülich

M. Staat, FH-Aachen Abt. Jülich, Ginsterweg 1, D-52428 Jülich

27. MPA-Seminar, Stuttgart, 4. und 5. Oktober 2001

## **1 Einleitung**

Auslegung und Bemessung von passiven Komponenten im Anlagenbau und im Maschinenwesen erfolgen heute verstärkt nach plastischen Grenzzuständen. Das neue europäische Regelwerk für Druckgeräte enthält die Vorschläge des European Pressure Equipment Research Council (EPERC) zum Design-by-Analysis (DBA) mittels Einspielanalysen u.a. mit dem Ziel eines Ausschlusses von Ratchetting und damit einer Begrenzung der fortschreitenden plastischen Deformationen [15]. Herkömmliche Regelwerke, wie der ASME Code, versuchen, plastische Einflüsse näherungsweise im Sinne der Traglast- und Einspieltheorie aus einer elastischen Spannungsanalyse durch Extrapolation abzuschätzen. Die Probleme mit den dabei benutzten Spannungskategorien werden in [15] ausführlich diskutiert.

Zukünftig werden FEM-basierte Einspielanalysen für DBA benötigt, mit denen sich auch für komplexe Strukturen eine gleichmäßige Sicherheit nachweisen lässt. Auf idealplastisches Material und einfache Lastfälle eingeschränkt, wurden Einspielanalysen in [15] auf verschiedene Druckbehälterprobleme angewandt. In dem europäischen Projekt LISA wird eine sehr allgemeine Traglast- und Einspielanalyse für verfestigendes und geschädigtes Material mit dem FEM-Programm PERMAS entwickelt [14]. Zur Absicherung der Einspieltheorie für fortschrittliche Werkstoffmodelle mangelt es bisher an Versuchen mit zyklischen, mechanischen und thermischen Lasten an der Grenze zwischen elastischem Einspielen und Ratchetting. In [11] und [7] werden Zweistab- bzw. Mehrstabexperimente ähnlich wie das Bree-Problem [9], untersucht. Sie repräsentieren einfache mechanische Modelle für Rohre und Behälter unter Innendruck und Temperaturgradient über die Wanddicke. Die in diesem Beitrag vorgestellten Versuche zielen auf die Angabe einer Einspielgrenze, unterhalb der Versagen durch Ratchetting nicht unterstellt werden muss.

In [5] wurde ein Verfahren angewandt, das auf der Basis der FEM-Diskretisierung direkt ohne Spannungsermittlung die Trag- und Einspiellast duktiler Strukturen für ideal plastisches Materialverhalten berechnet. Dieses Verfahren konnte in [4] auf kinematisch verfestigendes Material erweitert werden. Im vorliegenden Beitrag erfolgt im zweiten Abschnitt die Beschreibung eines hierzu durchgeführten Versuches. Im dritten Abschnitt werden die theoretischen Grundlagen zur FEM-basierten Einspielanalyse für kinematisch verfestigendes Material dargelegt. Weiter

werden die experimentellen Ergebnisse mit den Ergebnissen aus der Einspielanalyse und einem einfachen Kriterium zur Bewertung der Versuche vorgestellt.

## 2 Versuchsaufbau und experimentelle Ergebnisse

### 2.1 Probengeometrie und Materialeigenschaften

Das hier gewählte Material ist der häufig für Druckbehälter benutzte ferritische Stahl 20MnMoNi 5 5. Die chemische Zusammensetzung ist in Tab. 1 angegeben.

Tabelle 1: Chemische Zusammensetzung von 20MnMoNi 5 5 (%)

| C    | Si   | Mn   | P     | S     | Cr   | Mo   | Ni   | V           |
|------|------|------|-------|-------|------|------|------|-------------|
| 0.24 | 0.24 | 1.38 | 0.002 | 0.002 | 0.09 | 0.51 | 0.80 | $\leq 0.01$ |

Die Proben wurden aus einem 500 mm x 1000 mm Block gefertigt. Die Geometrie und die Dimensionen sind in Abb. 1 dargestellt. Um die mechanischen Eigenschaften des Materials

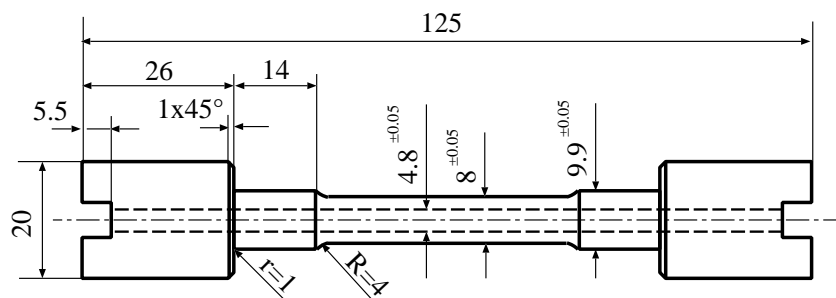


Abbildung 1: Geometrie und Dimensionen der Proben

zu charakterisieren, wurde eine Spannungs-Dehnungs-Kurve durch einen ein-achsigen Zugversuch auf einem servohydraulischen INSTRON 1343 Versuchsstand generiert (Abb. 2). Der Versuchsstand wird über eine LEBOW Lastdose kontrolliert. Die axialen Dehnungen wurden mit einem INSTRON Extensometer aufgezeichnet und auf einem PC 486 mit CASYLAB 5.0 Software ausgewertet. Zusätzlich wurde der Verdrehwinkel aufgezeichnet.

### 2.2 Beschreibung von Belastung und experimentelle Ergebnisse

Das Verfestigungsverhalten des Materials wurde unter monotoner Belastung bestimmt, Abb. 3 gibt die entsprechende Spannungs-Dehnungs-Kurve. Die gewonnenen mechanischen Eigenschaften des Materials sind in Tab. 2 dargestellt. Angegeben sind die untere Streckgrenze  $R_{eL}$ , die Zugfestigkeit  $R_m$ , der E-Modul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$ .

Tabelle 2: Materialeigenschaften aus ein-achsigem Zugversuch

| $R_{eL}$              | $R_m$                 | E                                   | $\nu$ |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------------------|-------|
| 485 N/mm <sup>2</sup> | 631 N/mm <sup>2</sup> | $2.07 \cdot 10^5$ N/mm <sup>2</sup> | 0.3   |

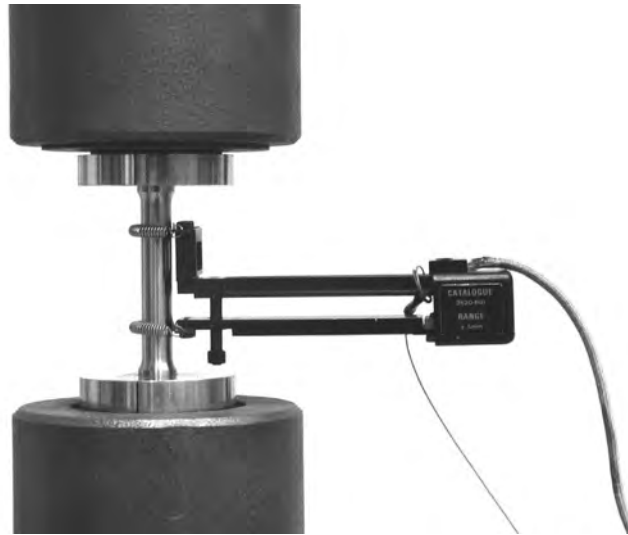


Abbildung 2: Versuchsaufbau

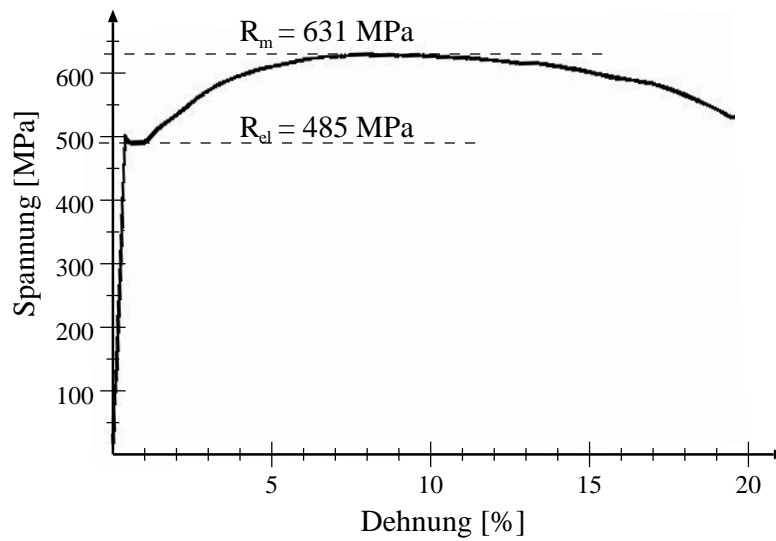


Abbildung 3: Spannungs-Dehnungs-Kurve

## 2.3 Biaxiale Zug-Torsionsversuche

Das Einspiel- bzw. Ratchetting-Verhalten der Proben wurde mit Zug-Druck-Versuchen unter zyklischer, axialer Spannungskontrolle untersucht. Vorab wurde eine direkte Einspielanalyse mit kinematisch verfestigendem Materialgesetz zur Bestimmung der Grenze zwischen Einspielen und Ratchetting bei Zug-Torsionsbelastung durchgeführt (siehe Abschnitt 4.4). Zur Verifizierung dieser Einspielgrenze wurden 10 Versuche mit unterschiedlichen Zugmittelspannungen und konstanten Momenten durchgeführt. Die unterschiedlichen Belastungen sind in Tab. 3 dargestellt. Die Mittelzugspannungen sind in Tab. 3 angegeben, für alle Experimente wurde eine Schwingbreite von  $\pm \Delta\sigma = 1$  kN gewählt. Die bleibenden Dehnungen und der bleibende Verdrehwinkel sind in Tab. 3 angegeben. Abb. 4 und Abb. 5 zeigen deutlich zyklisches Kriechen. Unter konstantem Torsionsmoment wächst der Verdrehwinkel, weil der Zug zyklisiert. Bei unbeschränktem Anwachsen des Winkles kommt es zum inkrementellen Kollaps. Elastisches Einspielen bedeutet, dass der Winkel einen Grenzwert annimmt, weil alle plastischen Vorgänge abklingen.

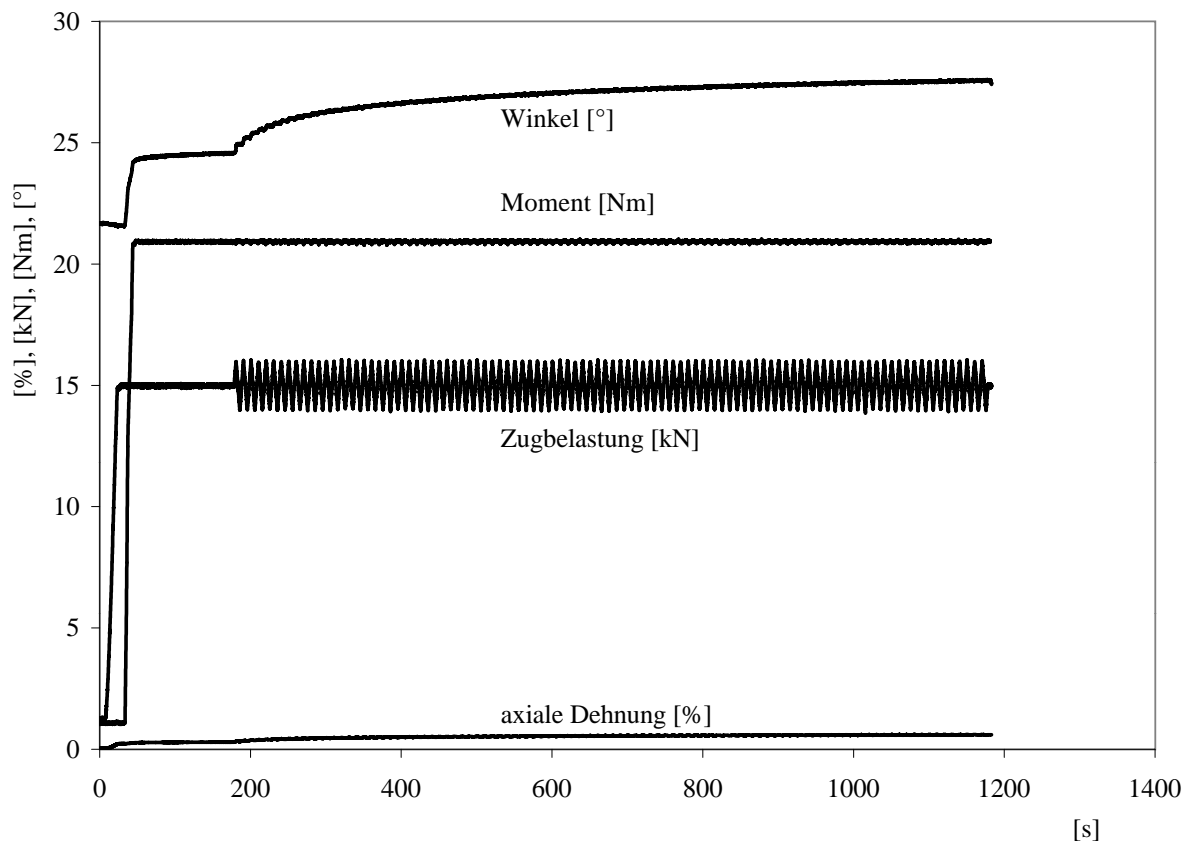


Abbildung 4: Belastung und Verformung für Experiment 2

Das Ergebnis der Einspielanalyse ist im Rahmen der klassischen Plastizitätstheorie von der Lastgeschichte unabhängig. Deshalb konnten die Proben aus Experiment 1 und 3 in Experiment 9 und 10 weiterverwendet werden. Probe Nr. 8 wurde im ersten Lastschritt bei 22 kN überlastet. Nach einer Stabilisierungsphase wurde die Probe mit der angegebenen Lastgeschichte belastet, so dass die verbleibenden Verformungen um die anfängliche Verformung reduziert

werden müssen, um das Ratchetting-Verhalten zu bestimmen. Die Überlastung war geringer als die Traglast der Probe, so dass das Ratchetting-Verhalten der Probe weiter dominiert.

Tabelle 3: Belastung, Verformung und Verdrehwinkel der Experimente

| Experiment     | 1    | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8 <sup>1</sup> | 9     | 10    |
|----------------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|-------|-------|
| Zug [kN]       | 17   | 15    | 16    | 10    | 18    | 21    | 17    | 20             | 18    | 5     |
| Moment [Nm]    | 7    | 21    | 14    | 28    | 17    | 4     | 24    | 14             | 3     | 32    |
| Anzahl Zykeln  | 150  | 100   | 100   | 71    | 100   | 100   | 200   | 200            | 200   | 200   |
| Winkel [°]     | 10.6 | 25.0  | 16.1  | 24.9  | 22.9  | 10.6  | 43.9  | 25.7           | 4.7   | 10.9  |
| axiale Dehnung | 0.11 | 0.097 | 0.313 | 0.931 | 0.786 | 2.362 | 1.075 | 1.328          | 0.092 | 0.077 |

<sup>1</sup> Anfängliche Überlastung auf 22 kN.

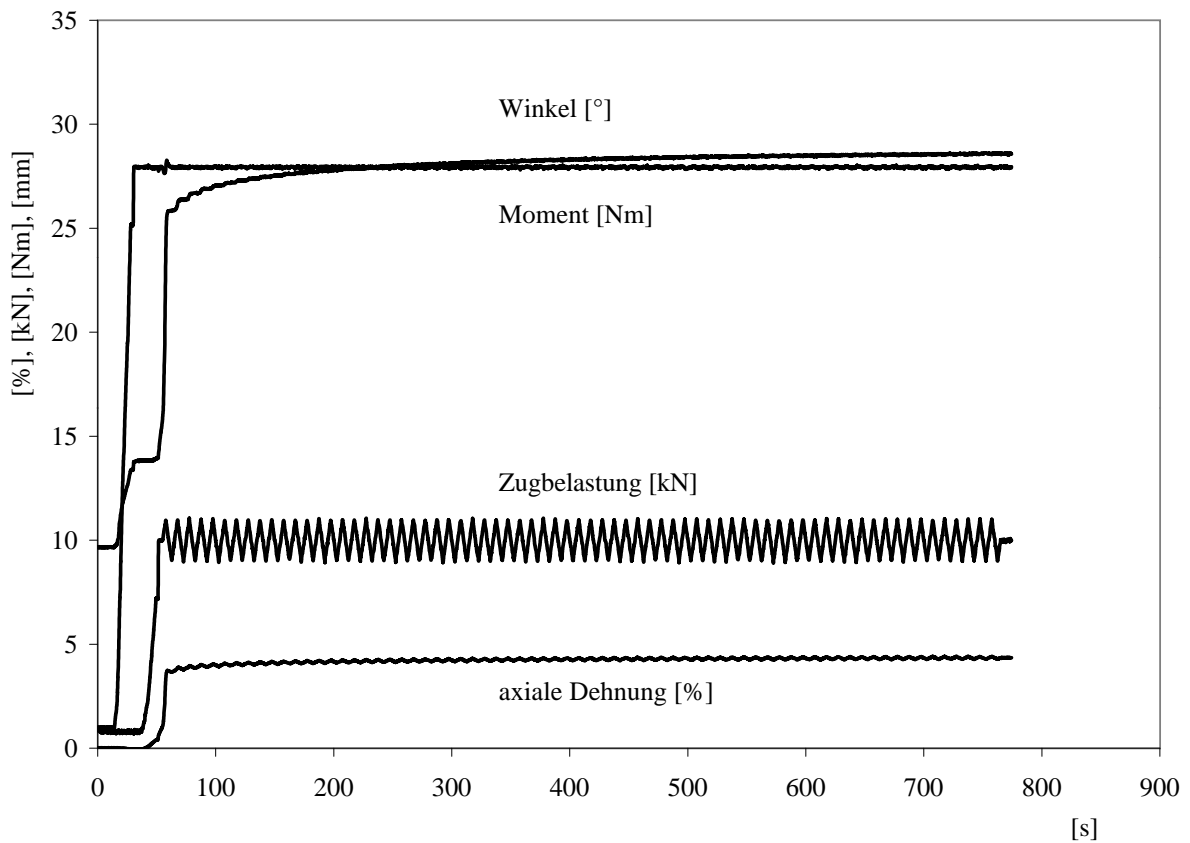


Abbildung 5: Belastung und Verformung für Experiment 4

### 3 Theorie und numerische Ergebnisse

#### 3.1 Allgemeine Einspielanalyse (Shakedown Analysis)

Je nach Belastung kann eine Struktur unterschiedliche Strukturantworten zeigen. Bei zeitvarianten Lasten kann die Struktur zusätzlich zum Kollaps plastisch versagen durch:

- Inkrementellen Kollaps bei Akkumulation plastischer Dehnungen in aufeinanderfolgenden Lastzyklen (auch Ratchetting, progressive Plastifizierung, zyklisches „Kriechen“ genannt),
- plastische Ermüdung bei alternierender Plastifizierung in wenigen Lastzyklen (auch Low Cycle Fatigue (LCF), plastisches Einspielen genannt).

Die Struktur versagt dagegen plastisch nicht, wenn schließlich alle plastischen Dehnungen abklingen und die dissipierte Energie endlich bleibt. Man sagt, die Struktur passt sich der Belastung an oder sie spielt elastisch ein.

Von einer Last  $\mathbf{P}(t) = (\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$  ist der zeitliche Verlauf oft nicht bekannt. Bekannt ist aber meist, dass sie nur in einem bestimmten konvexen Bereich  $\mathcal{L}$  variiert.  $\mathcal{L}$  ist typisch durch Amplituden oder zulässige Grenzen gegeben. Ist  $N_L$  die Anzahl der unabhängigen Belastungen  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{N_L}$  (z.B. mechanische, thermische Last), so lassen sich alle Lasten  $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$  durch  $N_L$  erzeugende Lasten darstellen

$$\mathbf{P}(t) = \lambda_1(t)\mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_{N_L}(t)\mathbf{P}_{N_L}, \quad 0 \leq \lambda_j(t) \leq 1. \quad (1)$$

Die Tragfähigkeit ist bei Vergrößerung von  $\mathcal{L}$  um den Faktor  $\alpha > 1$  durch Ratchetting, LCF oder Kollaps erschöpft. Die Einspieltheorie analysiert nur den eingespielten Zustand. Die Einspielsätze beantworten die Frage, wann die Struktur aus duktilem Material plastisch sicher ist und wann nicht.

Nach einem statischen Kriterium spielt eine Struktur unter einem Lastraum  $\mathcal{L}$  ein, wenn zu jeder Belastung in  $\mathcal{L}$  ein zulässiges Spannungsfeld gefunden werden kann, das mit dieser Last im Gleichgewicht steht. Ein Spannungsfeld heißt zulässig, wenn es die Fließbedingung mit der Fließfunktion  $F$  erfüllt. Es reicht die Überprüfung der Einspielbedingungen in den Lastecken  $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_j, \dots, \mathbf{P}_{N_L}$  mit  $\mathbf{P}_j = (\mathbf{q}_j, \mathbf{p}_j)$ :

#### Statischer Satz über das Einspielen:

Eine Struktur  $V$  spielt unter einem Lastraum  $\alpha\mathcal{L}$  ein, wenn zu jeder Basislast  $\alpha\mathbf{P}_j$  ein zulässiges Spannungsfeld  $\boldsymbol{\sigma}_j$  gefunden werden kann, welches mit der Last  $\alpha\mathbf{P}_j$  im Gleichgewicht steht. In Formeln:

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\sigma}_j) &\leq \sigma_0 && \text{in } V, \quad j = 1, \dots, N_L \\ -\text{div}\boldsymbol{\sigma}_j &= \alpha\mathbf{q}_j && \text{in } V, \quad j = 1, \dots, N_L \\ \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma}_j &= \alpha\mathbf{p}_j && \text{auf } \partial V_p, \quad j = 1, \dots, N_L. \end{aligned} \quad (2)$$

Diese Formulierung gilt unabhängig vom Materialgesetz. Für ideal plastisches Materialverhalten ist  $\sigma_0$  gleich der Streckgrenze zu setzen. Für kinematisch verfestigendes Material bleibt auch weiterhin die Forderung nach dem Gleichgewicht zwischen Belastung und auftretender Spannung erhalten. Die Forderung nach Erfüllung der Fließbedingung ist jedoch aufwändiger als für ideal plastisches Material. Der statische Satz liefert eine sichere untere Schranke für die Tragfähigkeit einer Struktur. Eine obere Schranke gewinnt man mit dem kinematischen Satz [14].

### 3.2 Kinematische Verfestigung

Die lineare kinematische Verfestigung lässt sich nach Melan mit einer nicht messbaren inneren Variablen als Verschiebung der Anfangsfließfläche im multiaxialen Lastraum um den Verfestigungstensor  $\pi$  (*Backstress*)

$$F[\sigma - \pi] = \sigma_y^2 \quad (3)$$

darstellen [8]. Das Innere der Fließfläche  $\{\sigma \mid F[\sigma - \pi] < \sigma_y^2\}$  ist der elastische Bereich, welcher durch die Fließfunktion  $F$  und die Fließspannung  $\sigma_y$  bestimmt ist. Hier wird die von Mises Funktion  $F[\sigma] = \frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D$  mit der deviatorischen Spannung  $\sigma^D$  benutzt.

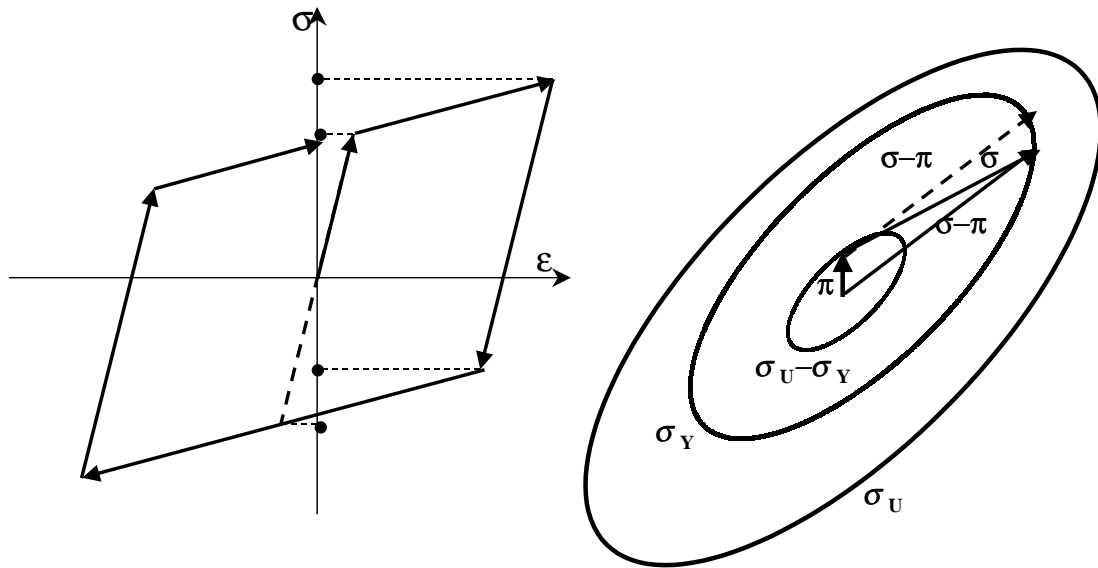


Abbildung 6: Zweiflächenmodell der beschränkten kinematischen Verfestigung, ein- und mehrachsig unterhalb der Sättigung.

Bei realen Werkstoffen wird die Spannung  $\sigma$  durch die Zugfestigkeit  $R_m$  begrenzt. Daher ist die Verschiebung der Anfangsfließfläche nicht unbeschränkt. Die Verfestigung ist beschränkt, wenn sich die Anfangsfließfläche nur innerhalb einer Verfestigungsfläche im Spannungsraum verschieben kann. In einem einfachen Modell wird eine nach Größe und Lage unveränderliche

Grenzfläche in Form der von Mises Funktion angesetzt

$$F[\boldsymbol{\sigma}] = \sigma_u^2. \quad (4)$$

Als Grenzspannung  $\sigma_u$  wird bei voller Ausnutzung der Verfestigung  $R_m$  angenommen. Der verschobene elastische Bereich verbleibt stets in der Verfestigungsfläche und jede Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  in diesem Bereich ist genau dann erreichbar, wenn gilt:

$$F[\boldsymbol{\pi}] \leq (\sigma_u - \sigma_y)^2. \quad (5)$$

Es gibt detailliertere Verfestigungsmodelle. Details der Verfestigung sind jedoch für die Frage, ob eine Struktur einspielt oder ob sie etwa durch Ratchetting plastisch versagt, teilweise ebenso unerheblich wie die Details der Lastgeschichte. Mit unendlich vielen Mikroelementen im Overlay-Modell kann man die Spannungs-Dehnungs-Kurve eines Werkstoffes genau nachbilden. Man kann aber für das Overlay-Modell zeigen, dass das Einspielverhalten ausschließlich durch  $\sigma_y$  und  $\sigma_u$  bestimmt wird [4], [16]. Das liegt daran, dass die Einspielanalyse nur die Versagensgrenzzustände untersucht. In theoretischen Arbeiten wurde inzwischen auch eine Einspieltheorie für nichtlineare kinematische Verfestigung nach Armstrong/Frederick, bzw. Lemaître/Chaboche entwickelt und auf zyklische Torsion bei konstantem Zug angewandt [1], [13].

### 3.3 Einspielsätze für kinematisch verfestigendes Material

Die statischen Sätze der Einspielanalyse sind in den Spannungen formuliert und ergeben ein mathematisches Maximierungsproblem für sichere Lasten. Die maximale sichere Last ist bei Ausschluß von Ratchetting und LCF die elastische Einspiellast. Jede zulässige Lösung des statischen Satzes ist eine untere Schranke für die sichere variable Last. Eine elasto-plastische Struktur versagt nicht plastisch (durch LCF oder Ratchetting) unter einer variablen Last, wenn sie im statischen Gleichgewicht ist, die Fließfunktion nirgends verletzt ist, alle plastischen Dehnungsänderungen verschwinden, d.h.  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^P(t) = \mathbf{0}$  sowie die totale plastische Dissipation beschränkt bleibt:

$$W_p = \int_0^\infty \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p(\mathbf{x}, t) dx dt < \infty. \quad (6)$$

Der Unterschied zwischen rein elastischem Verhalten und elastischem Einspielen kann nur bei Kenntnis der gesamten Belastungsgeschichte erkannt werden, da sich die Struktur bei elastischem Einspielen irgendwann rein elastisch verhält. Der erweiterte statische Einspielsatz für beschränkte kinematische Verfestigung kann wie folgt formuliert werden [4], [16]:

Existieren ein zeitunabhängiges Backstressfeld  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$  mit

$$F[\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})] \leq (\sigma_u(\mathbf{x}) - \sigma_y(\mathbf{x}))^2, \quad (7)$$

ein Faktor  $\alpha > 1$  und ein zeitunabhängiges Eigenspannungsfeld  $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x})$ , so dass

$$F[\alpha \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})] \leq \sigma_y^2(\mathbf{x}) \quad (8)$$

gilt für alle Lasten  $\mathbf{P}(t) \in \mathcal{L}$  und für alle Materialpunkte  $\mathbf{x}$ , so spielt die Struktur elastisch unter dem gegebenen Lastbereich  $\mathcal{L}$  ein.



Der maximale Faktor  $\alpha_{sd}$  für den die Bedingungen des Satzes gelten heißt *Einspielfaktor*. Dieser statische Ansatz führt zum konvexen Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
 & \max \quad \alpha \\
 \text{unter} \quad & F[\alpha \boldsymbol{\sigma}^E(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})] \leq \sigma_y^2(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \\
 & F[\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})] \leq (\sigma_u(\mathbf{x}) - \sigma_y(\mathbf{x}))^2 \quad \forall \mathbf{x} \in V \\
 & \operatorname{div} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V \\
 & \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V_p
 \end{aligned} \tag{9}$$

mit unendlich vielen Nebenbedingungen, welche durch FEM-Diskretisierung auf endlich viele reduziert werden können. Degeneriert der allgemeine Lastbereich  $\mathcal{L}$  zu einem einzelnen Punkt, so erhält man die Formulierung der Traglastanalyse als Spezialfall. Dieser Fall entspricht dem der ideal plastischen Traglastanalyse mit  $\sigma_u$  als begrenzender Spannung. Für ideal plastisches Materialverhalten ( $\sigma_u = \sigma_y$ ), verschwinden die Backstresses  $\boldsymbol{\pi}$ . Die ursprüngliche Formulierung für unbeschränkte Verfestigung nach Melan [8] ergibt sich aus der obigen Formulierung durch  $\sigma_u \rightarrow \infty$ .

### 3.4 Diskretisierung und Optimierung

Die für das Kontinuum formulierten Traglast- und Einspielsätze lassen sich mit der FEM diskretisieren oder wie es vielfach durchgeführt wurde, gleich für eine diskretisierte Struktur herleiten. Die Struktur  $V$  wird für die FEM in  $NE$  Finite Elemente mit den Gauss-Punkten  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, NG$  diskretisiert. Die Nebenbedingungen des Optimierungsproblems werden nur in den Gauss-Punkten überprüft.

Die Anzahl der Gauss-Punkte ist in der Regel für industrielle Anwendungen sehr groß, so dass die dazugehörigen Optimierungsprobleme nur durch effektive Lösungsverfahren handhabbar sind. Eine Methode zur Lösung solcher Probleme ist die *Basis-Reduktions-Methode* [3], [4], [16]. Sie verallgemeinert die in der Optimierungstheorie [2] wohlbekanntes Optimieren entlang eindimensionaler Suchrichtungen (z.B. Abstiegsverfahren). Bei der Basis-Reduktions-Methode wird, statt der Optimierung in der gesamten Menge der zulässigen Lösungen, iterativ in niedrig-dimensionalen Teilräumen der zulässigen Menge gesucht. Die Basen der Teilräume werden durch das allgemeine Finite Element Programm PERMAS [5], [10] erzeugt. Das Basis-Reduktions-Verfahren für ideal plastisches Material [3], [16] wurde in [4] auf kinematisch verfestigendes Material übertragen.

## 4 Analytische and numerische Ergebnisse

Jede Versuchsprobe besteht aus einem Hohlzylinder welcher mit konstantem Moment und alternierender Zugbelastung beansprucht wurde. Dazu passend wurden analytische Untersuchungen für den hohlen Teil der Proben, d.h. für ein Rohr mit Innenradius  $R_i$  und Außenradius  $R_a$  durchgeführt.

## 4.1 Elastisches Materialverhalten

Bei reiner Torsion und Achsensymmetrie verschwinden die Normalspannungen und es stellt sich ein reiner Schubspannungszustand  $\tau(r) = \sigma_{\theta z}$  ein. Die elastischen Spannungen bei einem konstanten Moment  $M_z$  sind am Radius  $r$  durch

$$\boldsymbol{\sigma}_M(r) = (0, 0, 0, \tau(r))^T \quad \text{mit} \quad \tau(r) = \frac{2M_z}{\pi(R_a^4 - R_i^4)}r \quad (10)$$

gegeben. Die elastischen Schubspannungen erreichen am Außenradius  $R_a = 4$  mm bei Innenradius  $R_i = 2.4$  mm ihr Maximum:

$$\tau_{max} = \tau(R_a) = \frac{2M_z R_a}{\pi(R_a^4 - R_i^4)} = \frac{M_z}{87.5 \text{ mm}^3} \quad (11)$$

mit der von Mises Vergleichsspannung  $\sqrt{3}\tau_{max}$ . Für die FEM-basierte Einspielanalyse ist das Rohr in  $n$  Elemente diskretisiert. Das FEM Modell benutzt auf dem Umfang 16 Elemente, so dass nach der FEM-Rechnung das Fließen des Rohrs für  $\sigma_y = 485 \text{ N/mm}^2$  bei

$$M_z^e = 23.20 \text{ Nm}, \quad (12)$$

anfängt, was hinreichend mit dem analytischen Wert  $M_z^e = 24.5 \text{ Nm}$  übereinstimmt. Die Differenz geht auf den Querschnittsverlust bei der FEM-Diskretisierung zurück.

Bei zusätzlicher Zugbelastung hat die von Mises Fließfunktion  $F$  mit den Spannungen  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau)^T$  im Zylinderkoordinatensystem die folgende Gestalt:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \sigma_z^2 - \sigma_r \sigma_\theta - \sigma_r \sigma_z - \sigma_\theta \sigma_z + 3\tau^2. \quad (13)$$

Die in der gesamten Struktur konstanten elastischen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_N$  stehen mit der Zugkraft  $N$  im Gleichgewicht,

$$\boldsymbol{\sigma}_N = (0, 0, \sigma_N, 0)^T \quad \text{und} \quad \sigma_N = \frac{N}{\pi(R_a^2 - R_i^2)}. \quad (14)$$

Für die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}_N$  und  $\boldsymbol{\sigma}_M$  zu Zug  $N_y = \alpha N$  und konstanter Momentenbelastung  $M_z$  gilt:

$$F(\alpha \boldsymbol{\sigma}_N + \boldsymbol{\sigma}_M) = (\alpha \sigma_N)^2 + 3\tau^2. \quad (15)$$

Die maximale Vergleichsspannung wird demnach am äußeren Rand  $R_a$  erreicht, so dass bei konstantem Moment  $M_z$  bei der Zuglast  $N_y$  das Fließen einsetzt mit:

$$N_y = \alpha_y N \quad \text{mit} \quad \alpha_y = \frac{\sqrt{\sigma_y^2 - 3\tau(R_a)^2}}{\sigma_N}. \quad (16)$$

Die Spannungskomponenten von  $\boldsymbol{\sigma}_N$  und  $\boldsymbol{\sigma}_M$  sind unabhängig, so dass der elastische Bereich für  $\sigma_y = 485 \text{ N/mm}^2$  bei Normierung auf  $M_z^e = 23.25 \text{ Nm}$  und  $N^e = 15.60 \text{ kN}$  einen 1/4-Kreis bildet.

## 4.2 Traglastanalyse

Das analytisch maximal zulässige Moment  $M_{lim}$  und die analytisch maximal zulässige Zugbelastung  $N_{lim}$  für ideal plastisches Material mit der Fließspannung  $\sigma_y = 485 \text{ N/mm}^2$  sind mit der vollplastischen Stützziffer  $\eta_{pl}$  [6] gegeben durch:

$$M_{lim}^{pp} = \eta_{pl} M_z^e = \frac{4}{3} \frac{1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^3}{1 - \left(\frac{R_i}{R_a}\right)^4} M_z^e = 1.20 M_z^e = 27.98 \text{ Nm}, \quad (17)$$

$$N_{lim}^{pp} = \pi(R_a^2 - R_i^2)\sigma_y = 15.62 \text{ kN}, \quad (18)$$

was exakt mit den numerischen Werten übereinstimmt. Für kinematisch verfestigendes Material mit der Zugfestigkeit  $\sigma_u = 631 \text{ N/mm}^2$  mit dem Streckgrenzenverhältnis  $\sigma_u/\sigma_y = 1.3$  gilt

$$M_{lim}^{kin} = \sigma_u/\sigma_y M_{lim}^{pp} = 1.3 M_{lim}^{pp} = 36.37 \text{ Nm}, \quad (19)$$

$$N_{lim}^{kin} = \sigma_u/\sigma_y N_{lim}^{pp} = 1.3 N_{lim}^{pp} = 20.30 \text{ kN}. \quad (20)$$

Der Traglastbereich bei Verfestigung ist eine proportionale Vergrößerung des ideal plastischen Traglastbereichs mit dem Streckgrenzenverhältnis  $\sigma_u/\sigma_y = 1.3$ .

## 4.3 Einspielanalyse

Die Einspielanalyse für konstantes Moment  $M_z$  und variablen Zug  $N \in [0, N_{max}]$  für unbeschränkt verfestigendes Material mit den freien Variablen  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\pi} = (y_r, y_\theta, y_z, y_{rz})^T$  lautet:

$$\begin{aligned} & \max \quad \alpha \\ & \text{unter} \quad F[\alpha \boldsymbol{\sigma}_N + \boldsymbol{\sigma}_M + \mathbf{y}] \leq \sigma_y^2 \quad \text{in allen Punkten} \\ & \quad \quad F[\boldsymbol{\sigma}_M + \mathbf{y}] \leq \sigma_y^2 \quad \text{in allen Punkten} \end{aligned} \quad (21)$$

$\boldsymbol{\sigma}_M$  und  $\boldsymbol{\sigma}_N$  sind nach (10) und (14) jeweils mit den Kräften  $M_z$  und  $N_y$  im Gleichgewicht. Für eine beliebige Diskretisierung mit  $n$  Gaußpunkten und den Spannungen im Punkt  $j$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_M^j = (0, 0, 0, \tau^j)^T, \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_N^j = (0, 0, \sigma_N, 0)^T, \quad (23)$$

$$\mathbf{y}^j = (y_r^j, y_\theta^j, y_z^j, y_{rz}^j)^T, \quad (24)$$

lautet die Lagrangefunktion [2] zum Optimierungsproblem für unbeschränkt verfestigendes Material:

$$L = -\alpha - \sum_{i=1}^n \lambda_{2i-1} \left\{ \sigma_y^2 - F[\alpha \boldsymbol{\sigma}_N^i + \boldsymbol{\sigma}_M^i + \mathbf{y}^i] \right\} - \sum_{i=1}^n \lambda_{2i} \left\{ \sigma_y^2 - F[\boldsymbol{\sigma}_M^i + \mathbf{y}^i] \right\} \quad (25)$$

mit den Lagrange-Parametern  $\lambda_l, l = 1, \dots, 2n$ . Im Optimum gelten für alle  $i = 1, \dots, n$  die Komplementaritätsbedingungen [2]:

$$0 = \lambda_{2i-1} \left\{ \sigma_y^2 - F[\alpha \boldsymbol{\sigma}_N^i + \boldsymbol{\sigma}_M^i + \mathbf{y}^i] \right\} \quad (26)$$

$$0 = \lambda_{2i} \left\{ \sigma_y^2 - F[\boldsymbol{\sigma}_M^i + \mathbf{y}^i] \right\}. \quad (27)$$

Weiter gilt mit  $\nabla L = 0$  die Bedingung [2]:

$$0 = -1 + \sum_{i=1}^n \lambda_{2i-1} \left\{ 2(\alpha \sigma_N^i + y_z^i) \sigma_N^i - \sigma_N^i y_r^i - \sigma_N^i y_\theta^i \right\}. \quad (28)$$

Zusätzlich gelten mit  $\nabla L = 0$  folgende Bedingungen für alle  $i = 1, \dots, n$ :

$$0 = [\lambda_{2i-1} + \lambda_{2i}] [2y_r^i - y_\theta^i - y_z^i] - \lambda_{2i-1} \alpha \sigma_N^i \quad (29)$$

$$0 = [\lambda_{2i-1} + \lambda_{2i}] [2y_\theta^i - y_r^i - y_z^i] - \lambda_{2i-1} \alpha \sigma_N^i \quad (30)$$

$$0 = [\lambda_{2i-1} + \lambda_{2i}] [2y_z^i - y_r^i - y_\theta^i] - 2\lambda_{2i-1} \alpha \sigma_N^i \quad (31)$$

$$0 = (6\lambda_{2i-1} + 6\lambda_{2i})(y_{rz}^i + \tau^i) \quad (32)$$

O.B.d.A. kann angenommen werden, dass im Optimum mindestens ein Gaußpunkt  $j$  existiert, für den entweder  $\lambda_{2j-1} > 0$  oder  $\lambda_{2j} > 0$  gilt (ansonsten erreichte kein Punkt der Struktur die Fließgrenze). Dabei sind die folgenden Fälle zu unterscheiden.

i)  $\lambda_{2j-1} = 0, \lambda_{2j} > 0$ :

Aus Bedingung (29) und (30) folgt sofort  $y_r^j = y_\theta^j$  sowie aus (29) und (31) analog  $y_r^j = y_z^j$ . Aus Bedingung (32) folgt  $y_{rz}^j = -\tau^j$ . Bedingung (27) liefert dann einen Widerspruch.

ii)  $\lambda_{2j-1} > 0, \lambda_{2j} = 0$ :

Aus Bedingung (29) und (30) folgt sofort  $y_r^j = y_\theta^j$ . Damit und mit Bedingung (31) folgt  $\alpha \sigma_N^j + y_z^j = y_r^j$ . Aus Bedingung (32) folgt  $y_{rz}^j = -\tau^j$ . Mit Bedingung (26) folgt ein Widerspruch.

iii)  $\lambda_{2j-1} > 0, \lambda_{2j} > 0$ :

Aus Bedingung (32) folgt  $y_{rz}^j = -\tau^j$ . Mit den Komplementaritätsbedingungen (26) und (27) und  $\alpha, \sigma_N^j > 0$  folgt

$$\alpha = \frac{y_r^j + y_\theta^j - 2y_z^j}{\sigma_N^j}. \quad (33)$$

Eingesetzt in Bedingung (31) folgt  $[\lambda_{2i-1} - \lambda_{2i}][2y_z^i - y_r^i - y_\theta^i] = 0$ . Daraus folgt  $\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j}$  (ansonsten folgt aus  $2y_z^i - y_r^i - y_\theta^i = 0$  mit den Bedingungen (29) und (30) ein Widerspruch). Bedingung (30) liefert dann  $y_r^j = y_\theta^j$ . Weiter folgt aus Bedingung (29)  $2(y_r^j - y_z^j) = \alpha \sigma_N^j$ . Dies eingesetzt in Bedingung (27) ergibt schließlich für den Einspielfaktor:

$$\alpha = 2 \frac{\sigma_y}{\sigma_N^j}. \quad (34)$$

Daraus folgt, daß bei konstanter Momentenbelastung und zyklischer Zugbelastung für unbeschränkt verfestigendes Material der Radius des Einspielbereichs doppelt so groß ist wie der des elastischen Bereichs.

Dies widerspricht der analytisch berechneten Traglastgrenze, da der Einspielbereich demnach außerhalb des Traglastbereichs liegt. Somit stimmen der Einspielbereich und der Traglastbereich überein. Die benutzten notwendigen Einspielkriterien sind nicht hinreichend, so dass auch die Beschränktheit der totalen plastischen Dissipation und der Einfluss der Geometrieänderung untersucht werden muss.

### 4.4 Einspiel-Interaktionsdiagramm

Der Einspielbereich für das vorgestellte FEM-Modell (Abb. 7) wurde mit der Basis-Reduktions-Methode berechnet. Das Interaktionsdiagramm (Abb. 8) ist mit der reinen Einspiel-Zugbelastung  $F_{z_0} = 15.62 \text{ kN}$  und dem reinen Einspiel-Moment  $M_{z_0} = 27.98 \text{ Nm}$  für ideal plastisches Material mit  $\sigma_y = 485 \text{ N/mm}^2$  normalisiert.

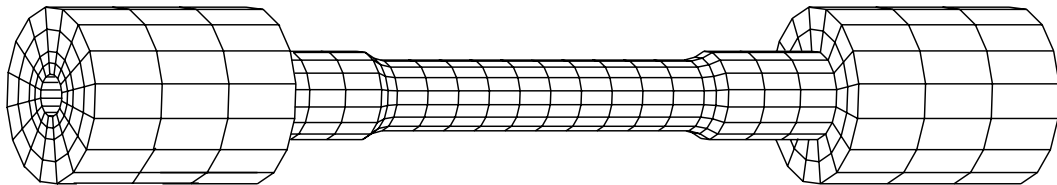


Abbildung 7: Finite Element Modell

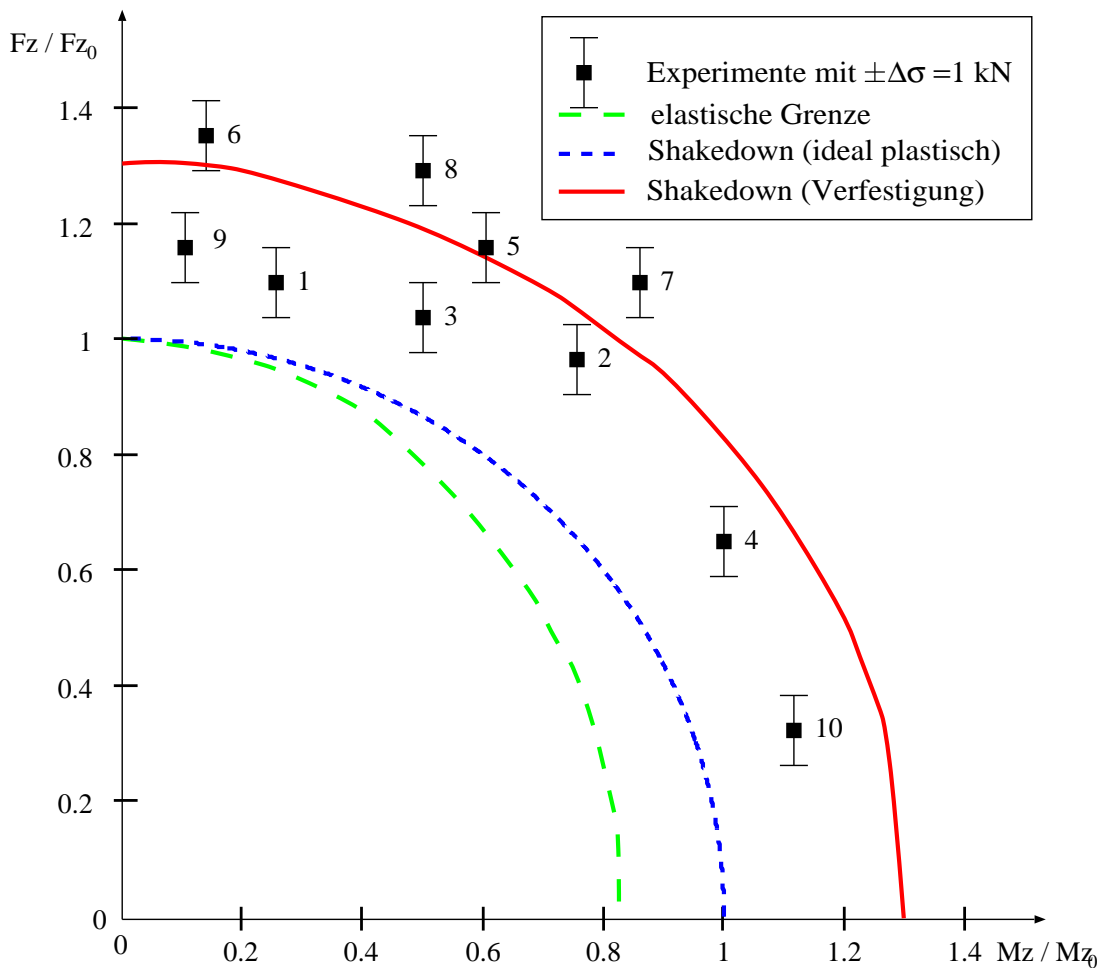


Abbildung 8: Einspiel-Interaktionsdiagramm und experimentelle Daten, normalisiert mit Einspiel-Zugbelastung  $F_{z_0}$  und Einspiel-Moment  $M_{z_0}$  für ideal plastisches Material

Das Interaktionsdiagramm weist bei Verfestigung einen deutlichen Sicherheitsgewinn gegenüber der ideal plastischen Einspielanalyse aus. Weitere Beispiele mit Verfestigung finden sich für andere Strukturen und thermische Belastung in [4].

## 4.5 Versuchsauswertung

Im Falle von LCF und Ratchetting verschwinden die plastischen Dehnungsinkremente im Laufe der Belastung nicht. Bei elastischem Einspielen werden die plastischen Dehnungen  $\varepsilon^p$  für die gegebene Last dagegen stationär, d.h. für  $t \rightarrow \infty$  gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\varepsilon}^p(x, t) = \mathbf{0} \text{ für alle } x \in V. \quad (35)$$

Damit kein Versagen eintritt, muss die maximal mögliche lokale plastische Dissipationsenergie zusätzlich für alle Punkte beschränkt bleiben. In einer inkrementellen Nachrechnung lässt sich erst nach sehr vielen Lastwechseln zwischen Ratchetting und Einspielen entscheiden. Neben den damit verbundenen langen Rechenzeiten können Probleme mit der Akkumulation der numerischen Fehler auftreten. Daher wurde aus der Stationaritätsbedingung für  $\varepsilon^p$  in [17] zur Verkürzung der Rechenzeiten ein einfaches Kriterium für elastisches Einspielen abgeleitet, das sich auch zur Versuchsauswertung anbietet [7]. Sei  $n$  die Nummer des Lastzyklus und  $\dot{\varepsilon}^p(n)$  das plastische Dehnungsincrement im Lastzyklus  $n$  im schwächsten Punkt der Struktur. Spielt die Struktur ein, so muss die Akkumulation der plastischen Dehnungsinkremente in diesem Punkt beschränkt bleiben, d.h. es gibt eine Konstante  $c$  mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\dot{\varepsilon}^p(n)| < c. \quad (36)$$

Mit der axialen Dehnung  $\varepsilon^p$  und dem Scherwinkel  $\gamma^p = 2\varepsilon_{\theta z}^p$  sind die effektiven plastischen Dehnungsinkremente durch

$$|\dot{\varepsilon}^p| := \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p : \dot{\varepsilon}^p} = \sqrt{(\dot{\varepsilon}^p)^2 + \frac{4}{3} (\dot{\gamma}^p)^2} \quad (37)$$

gegeben. Den Scherwinkel berechnet man bei der einfachen Kinematik des drehsymmetrischen Querschnittes aus dem Verdrehwinkel  $\vartheta$  auf der Länge  $L$  zu

$$\gamma(r) = r \frac{\vartheta}{L}. \quad (38)$$

Daraus erhält man die plastischen Inkremente  $\dot{\gamma}^p$ , wenn man die Differenzen zu jeweils denselben Lasten bildet und sich die elastischen und plastischen Dehnungen additiv zerlegen, wie in der klassischen, geometrisch linearen Plastizitätstheorie angenommen (d.h.  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ ).

Die einfachste Bedingung für die Konvergenz dieser Summe als verallgemeinerte harmonische Reihe lautet  $|\dot{\varepsilon}^p(n)| \leq an^s$  mit  $s < -1$ . Dies bedeutet, dass in einem doppelt-logarithmischen Diagramm der plastischen Dehnungen über den Lastzyklen im Fall von LCF oder Ratchetting die Steigung größer als  $s = -1$  sein muss. Die gemessenen plastischen Dehnungsinkremente wurden mittels der Kleinste-Fehler-Quadrat-Methode extrapoliert. Die besten Schätzungen für  $s$  sind in Tab. 4 dargestellt.

Tabelle 4: Ergebnisse der vereinfachten Analyse

| Test Nr. | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8 <sup>2</sup> | 9     | 10    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|-------|-------|
| $s$      | -3.98 | -0.82 | -1.42 | -2.19 | -1.10 | -1.41 | -1.21 | -0.65          | -1.71 | -1.12 |

<sup>2</sup> Anfängliche Überlastung, so dass die Dehnungen reduziert werden müssen.

Nach einem ersten optischen Eindruck wird man von Abb. 4 Ratchetting in Experiment 2 erwarten und von Abb. 5 Einspielen in Experiment 4. An den Werten von  $s$  kann die Konvergenz von (36) sicherer abgelesen werden. Die Belastungen 1, 3, 4, 6, 9 und mit Einschränkung 5, 10 (eventuell ist im Vorversuch bei Experiment 10 ein zu großer Verdrehwinkel aufgetreten) liegen im Einspielbereich, weil die plastischen Dehnungen nach dem Majorantenkriterium beschränkt sind. Dagegen ist bei den Belastungen 2 und 8 mit Ratchetting zu rechnen, weil die plastischen Dehnungen divergieren, d.h. unbeschränkt anwachsen. Im Rahmen der experimentellen Unsicherheiten entspricht dies dem Interaktionsdiagramm in Abb. 8, obwohl es nur geometrisch linear berechnet wurde.

## 5 Zusammenfassung

Traglast- und Einspielanalysen sind vereinfachte doch exakte Verfahren der klassischen Plastizitätstheorie, die neben ausreichender Verformbarkeit keine einschränkende Voraussetzungen beinhalten. Die Vereinfachungen betreffen die Beschaffung der Daten und Modelle für Details der Lastgeschichte und des Stoffverhaltens. Eine FEM-basierte Traglast- und Einspielanalyse für ideal plastisches Material wurde auf ein kinematisch verfestigendes Materialgesetz erweitert und in das Finite Element Programm PERMAS implementiert. In einem einfachen Zug-Torsionsexperiment wurde eine Hohlprobe mit konstanter Torsion und zyklischer Zugbelastung beansprucht, um die neue Implementierung zu verifizieren. Es konnte gezeigt werden, dass die Einspielanalyse gut mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt. Bei Verfestigung lassen sich wesentlich größere Sicherheiten nachweisen. Dieses Potential bedarf weiterer experimenteller Absicherung. Parallel dazu ist die Einspieltheorie auf fortschrittliche Verfestigungsansätze zu erweitern.

*Danksagung:*

Die Arbeiten wurden teilweise durch das Brite-EuRam III Projekt LISA: FEM-Based Limit and Shakedown Analysis for Design and Integrity Assessment in European Industry (Projekt BE 97-4547, Kontrakt BRPR-CT97-0595) gefördert.

## Literatur

- [1] De Saxce, G. Tritsch, J.-B., Hjiiaj, M. (2000), Shakedown of elastic-plastic structures with non-linear kinematical hardening by the bipotential approach. In Weichert, D., Maier, G. (Hrsg.): *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads*, Dordrecht, Kluwer, 167–182.

- [2] Fletcher, R. (1987), *Practical Methods of Optimization*, New York, John Wiley & Sons.
- [3] Heitzer, M. (1999), Traglast- und Einspielanalyse zur Bewertung der Sicherheit passiver Komponenten, *Berichte des Forschungszentrums Jülich Jül-3704*.
- [4] Heitzer, M., Pop, G. Staat, M. (2000), Basis reduction for the shakedown problem for bounded kinematic hardening material, *Journal of Global Optimization* 17, 185–200.
- [5] Heitzer, M., Staat, M. (1999), FEM-computation of load carrying capacity of highly loaded passive components by direct methods, *Nuclear Engineering and Design* 193, 349–358.
- [6] Issler, L., Ruoß, H., Häfele, P. (1995), *Festigkeitslehre – Grundlagen*, Berlin, Heidelberg, Springer.
- [7] Lang, H., Wirtz, K., Heitzer, M., Staat, M., Oettel, R. (2001) Cyclic Plastic Deformation Tests to Verify FEM-Based Shakedown Analyses. *Nuclear Engineering and Design* 206, 227–239.
- [8] Melan, E. (1938), Zur Plastizität des räumlichen Kontinuums, *Ingenieur-Archiv* 8, 116–126.
- [9] Ng, H.W., Moreton, D.N. (1982) The Bree-diagram - origins and literature - some recent advances concerning experimental verification and strain-hardening materials. In Wilshire, B. (Hrsg.): *Recent advances in creep and fracture of engineering materials and structures*. Pineridge Press 185–230.
- [10] PERMAS (1988), *User's Reference Manuals*, Stuttgart, INTES Publications No. 202, 207, 208, 302, UM 404, UM 405.
- [11] Ponter, A.R.S. (1983), Shakedown and ratchetting below the creep range. *CEC Report EUR 8702 EN, Brussels*.
- [12] Portier, L., Calloch, S., Marquis, D., Geyer, P. (2000), Ratchetting under tension-torsion loadings: experiments and modelling, *International Journal of Plasticity* 16, 303–335.
- [13] Pycko, S., Maier, G. (1995), Shakedown theorems for some classes of nonassociated hardening elastic-plastic material models. *International Journal of Plasticity* 11, 367–395.
- [14] Staat, M., Heitzer, M. (2001), LISA a European Project for FEM-based Limit and Shakedown Analysis, *Nuclear Engineering and Design* 206, 151–166.
- [15] Taylor, N. et al. (1999), *The Design-by-Analysis Manual*, *CEC Report EUR 19020 EN, DG-JRC/IAM, Petten*.
- [16] Stein, E., Zhang, G., and Mahnken, R. (1993), Shakedown analysis for perfectly plastic and kinematic hardening materials, in Stein, E. (ed.): *Progress in computational analysis of inelastic structures*, Wien, Springer, 175–244.
- [17] Wolters, J., Breitbach, G., Rödiger, M. (1996), Untersuchungen zum Ratchetting von Segmenten der Ersten Wand zukünftiger Fusionsreaktoren unter zyklischer thermischer und mechanischer Belastung, *Berichte des Forschungszentrums Jülich Jül-3250*.